

ابن سينا

# الشفاء

الفن الثاني في الرياضيات

لـ الحُصَّابِ

٢

رابعه ودرم له

الدكتور ابراهيم بيومي مذكور

تخفيف

الأستاذ عبد الحميد لطفى منظر

منشورات مكتبة آية الله العظمى المرعشى النجفى

قم المقدسة - ايران ١٤٠٥ هـ ق



# الفهرس

الصفحة

الموضوع

تصدير :

الدكتور ابراهيم بيومي مذكور . . . . . ٥

ملاحظات :

الاستاد عبد الحميد لطفى . . . . . ٩

المقالة الاولى :

خواص العدد . . . . . ١٥

المقالة الثانية :

أحوال العدد من حيث إضافته إلى غيره . . . . . ٣٥

المقالة الثالثة :

أحوال العدد من حيث كيفية تأليفه من الوحدات . . . . . ٥١

المقالة الرابعة :

المتواليات العشر . . . . . ٦٣



# تصدير

أشرنا غير مرة إلى أن ابن سينا العالم لم يدرس بعد الدرس اللائق به ، وكشفت طبيعيات « الشفاء » عن عدة جوانب من دراساته الطبيعية ، ونوهنا بها في كلمة مختصرة باللغة الفرنسية تحت عنوان (Ibn Sina Savant) . وفي رياضيات « الشفاء » جوانب أخرى جديدة بالدرس والبحث (١) . وقد درج المسلمون في تثقيف أبنائهم على أن ييكمروا بتعليمهم الهندسة والحساب ، لأنها معارف ثابتة دقيقة ، تعين على تكوين عقل مستنير درب على الصواب ، « ويقال من أخذ نفسه بتعلم الحساب أول أمره غلب عليه الصدق » (٢) . فلم يكن غريبا أن يبدأ ابن سينا في تعلم الحساب والهندسة وهو في سن العاشرة ، اتجه إليهما في ضوء ما كان يجري من حديث حولهما بين والده وأخيه ، ووجهه أبوه إلى رجل يبيع البقل ، ويلم بحساب الهند ، ثم أعد له مدرسا خاصا أنزله داره ، ووكل إليه أمر تعليمه ، وهو أبو عبد الله الثاني الذي كان يشتغل بالفلسفة وعلم التعاليم ، ولم يلبث التلميذ أن برز على أستاذه (٣) .

وبرغم هذا لانستطيع أن نعه بين كبار الرياضيين في الإسلام ، وقد أشرنا إلى هذا من قبل (٤) . عرف الحساب والهندسة ، وشغل بالفلك والموسيقى ، ولكنه لم يكتب فيها شيئا يذكر فيما عدا ما ورد في كتاب « الشفاء » . ورياضيات « النجاة » ليست في الواقع من صنعه ، بل استخلصها تلميذه الجوزجاني من رياضيات « الشفاء » : ويبدو بوضوح أنه كان يربط الحساب بالفلسفة ، جريا على تقسيم العلوم النظرية الذي يصعد إلى

---

(١) Essays on Islamic Philosophy and Science, New York Press 1975.

(٢) ابن خلدون ، مقدمة ، بيروت ١٨٧٥ ، ص ٤٢٢ .

(٣) القفطي ، تاريخ الحكماء ، إدراج ١٩٠٣ ، ص ٤١٣ - ٤١٤ .

(٤) Madhour, Al-Biruni et Ibn Sina, Mideo, 1975, p. 201.

أرسطو . ويصرح في أول هذا الكتاب الذى تصدر له بأن الحساب أو علم العدد قد عولج في كتاب « المقولات » ، كما عولج في كتاب « الالهيات » ، وإن كان قد عول فيه بخاصة على كتاب « الأسطقسات » لأقليدس ، ويعنيه منه ما يستخدم في الاستدلال وينفع في البراهين (١) .



وقد أفاد العرب من رياضيات اليونان والهند ، أخذوا عنهما ، وترجموا قدرا من أصولهما . وعنوا بما ترجموه عناية خاصة ، فشرحوه وعلقوا عليه ، أو لخصوه واختصروه ، ووضعوا في العلوم الرياضية مؤلفات متعددة (٢) . تدارسوها إلى جانب العلوم العقلية عامة جيلا بعد جيل . ومن الرياضيين الأول يكفى أن نشير إلى الخوارزمي ( ٢٢٩ هـ - ٨٤٧ م ) واضع علم الجبر ، الذى عرف باسمه في القرون الوسطى المسيحية ، والكندى ( ٢٥٧ هـ - ٨٧٣ م ) فياسوف العرب ؛ وثابت بن قره ( ٢٨٧ هـ - ٩٠١ م ) بين كبار المترجمين . وتلاههم رياضيون متعاقبون ، وفي القرن الرابع والخامس للهجرة أصبحنا أمام علوم رياضية عربية خالصة شغل بها ابن سينا ( ٤٢٨ هـ - ١٠٣٧ م ) ، كما اضطلع بها بعض معاصريه من كبار الرياضيين ، أمثال ابن الهيثم ( ٤٣٠ هـ - ١٠٣٩ ) والبيروني ( ٤٤٨ هـ - ١٠٤٨ م ) .

ولقد عرف العرب كيف يلائمون بين الحساب الهندى والحساب الرومى ، وأدركوا الصلة بين الحساب والهندسة ، وعدوا الجبر والمقابلة فرعا منه . وألوا بآبوابه المختلفة من أعداد صحيحة وكسور عشرية ، وجنور تربيعية وتكعيبية ، وطبقوه على بعض دراساتهم الفقهية ، من علم المعاملات ، وعلم الفرائض والمواريث . والحساب عندهم ضربان : عملى ، وهو الذى يبحث فى العدد من حيث هو معلودات كالدرهم والدنانير ، وعليه يعول الناس فى معاملاتهم السوقية والمدنية . والحساب النظرى هو الذى يبحث فى الأعداد لذاتها مجردة فى الذهن ، وهو ألصق بالعلوم على اختلافها ، وهذا فيما يبدو هو ما أولع به ابن سينا .



(١) كتاب الحساب ، القاهرة ١٩٧٥ ، ص ٩ .

(٢) ابن النديم ، الفهرست ، القاهرة ١٩٣٠ ، ٣٧١ - ٣٩٠ .

ويلور كتابه الذى بين أيدينا حول أربع مقالات ، تنصب أولاها على خواص العدد زوجا كان أو فردا ، تاما كان أو ناقصا ، متحبا أو غير متحاب ، متساويا أو غير متساو ، متواليا أو غير متوال (١) . ويعالج فى الثانية أحوال العدد من حيث إضافته إلى غيره ، فبين إضافة المساواة والمعادلة ، وإضافة الخلاف والتفاوت . ويعرض لمقايضة الأعداد بعضها ببعض ، وانسبها المختلفة (٢) . ويقف الثالثة على أحوال العدد من حيث كيفية تأليفه من وحدانيات ، وهنا يربط الحساب بالهندسة ربطا واضحا (٣) . وفى المقالة الرابعة يتحدث عن المتواليات العشر مكتفيا بها ، ومنكرا على من يصعلون بها إلى عشرين ، ويفرق بين الوسطة العددية والوسطة الهندسية (٤) .

ويختتم بحثه قائلا : « قد تركنا أحوالا اعتبرنا ذكرها فى هذا الموضع خارجة عن قانون الصناعة ، وقد بقى من علم الحساب ما يغنى فى الاستعمال والاستخراج ، وهو هو فى العمل مثل الجبر والمقابلة ، والجمع والتفريق الهندى وما يجرى مجراها ، والأولى فى أمثال ذلك أن تذكر فى الفروع » (٥) . ويتضح من هذا أن ابن سينا يهمل ما سماه ابن خلدون ( ٨٠٨ هـ = ١١٠٦ م ) صناعة الحساب ، من جمع وطرح : وضرب وقسمة (٦) ، ويقف بدراسته عندما هو ألصق بالفلسفة والنظر المجرد ، وهو دون نزاع فيلسوف قبل أن يكون رياضيا . ويمثل كتابه مرحلة من مراحل التأليف فى علم الحساب ، فيه مصطلحات عدل عنها ، وأخرى قدر لها أن تبقى إلى اليوم ، وفى نشره ما يكشف عن حلقة من حلقات تاريخ العلوم الرياضية فى الإسلام .



وقد اضطلع بتحقيقه شيخ رياضى متخصص ، هو المرحوم الأستاذ عبد الحميد لطفى وقف عليه زمنا غير قصير ، وعول فى تحقيقه على ثلاثة

(١) ص ٧ - ٢٢ .

(٢) ص ٢٤ - ٣٩ .

(٣) ص ٤٣ - - ٥٢ :

(٤) ص ٥٥ - ٥٨ .

(٥) ص ٥٩

(٦) ابن خلدون ، مقدمة ، بيروت ١٨٧٩ ، ص ٤٣١ .

مخطوطات نعتد بها ، وهى نسخة بنجيت ( ب ) ، ونسخة دار الكتب ( د ) ،  
ونسخة داماد الجديدة ( سا ) . وهذه النسخ الثلاث هى التى تشتمل وحدها ،  
مما توفر لدينا من أصول « الشفاء » ، على الرياضيات . وقد لاقى محققنا عتنا  
كثيرا فى قراءتها واستخلاص نص مختار منها ، لأن النساخ فيما يبدو لم  
يكونوا على بينة مما ينسخون ، والرياضة العليا ليست فى متناول عامة القراء  
والنساخ . لذلك اضطر المحقق إلى أن يصحح خطأ ، وأن يتدارك نقصا ،  
وقد أشار إلى ذلك غير مرة .

وكم وددنا أن يمتد به الأجل حتى يشرف بنفسه على إخراج تحقيقه ،  
ويضيف إليه الفهارس التى درجنا عليها . ولم نشأ أن نحل أحدا محله ، آسفين  
بخاصة لأن المصطلح الرياضى الوارد فى هذا الكتاب لم يجمع ويفهرس ؛ مع  
ذكر مقابله الأجنبى . تغمده الله فقيدنا برحمته ، وجزاه عما قدم  
خير الجزاء ؛

إبراهيم مذكور



ملاحظات

للمحقق

الأستاذ عبد الحميد لطفي



صفحة ٢ : تتضمن هذه الصفحة القانونين :

$$[ (r + d) + (r - d) ] \frac{1}{2} = d$$

$$2r + (r + d)(r - d) = 2d$$

صفحة ٣ : تتضمن القوانين :

$$(1 - r)d = d - d r$$

$$1 + (1 - r)d = (1 - d)(-dr)$$

$$(1 - r)d = d - d^2$$

$$1 + (1 - d)d = (1 - d) - d^2$$

$$1 - d(1 - d) = d - (1 - d)d$$

$$d^2 = d - (1 + d)d$$

صفحة ٤ : تتضمن القوانين :

$$(1 + d)d(1 - d) = d - d^2$$

$$(1 + d + d^2)(1 - d)d = d - d^4$$

$$d^2(1 + d) + d^2(1 - d) = d + d^2$$

$$2r^2 + d^2 = d^2(r + d) + d^2(r - d)$$

صفحة ٥ : تتضمن :

$$(d + d^2)(1 + d) + (d - d^2)(1 - d) = d + d^2$$

$$+ (-r - d)(r - d) = (1 + r)r + d^2$$

$$(1 + r + d)(r - d)$$

$$(r + d)(1 + d) + (r - d)(1 - d) = r + d^2$$

صفحة ٨ : تتضمن :

$$2 = 2 + \frac{(1-2)2}{2} \times 2$$

صفحة ١٥ : تتضمن :

$$2 = 3 - 2 + 2 + 1, (3-2)2, 3-2$$

صفحة ١٧ : تتضمن :

$$1 - 2 \times 3 = 2 + 1 - 1 + 2$$

$$1 - 1 - 2 \times 3 = 1 - 2 - 1 - 1 + 2$$

$$2 - 1 - 2 \times 4 = 1 - 1 - 2 \times 3 + 1 - 2 \times 3$$

صفحة ١٩ : تتضمن :

$$2 = [(1-2)4 + 2] + 2$$

$$2 = [(1-2)4 + 2] + 6$$

$$2 = \frac{2 + (1-2)2}{4}$$

صفحة ٢٣ : تتضمن :

$$2(1 - 1 + 2) = 1 + 8 \times (1 - 2)1 - 2$$

$$1 - 2 = \frac{1}{4} + \frac{-1 + 2}{4}$$

صفحة ٥٢ : تتضمن :

$$2 \text{ س ص } + 2 \text{ ص } + 2 \text{ ص } ( \text{س} + \text{ص} )$$

$$2 + 2 + \frac{1}{4} + 2 \text{ مربع } 6 + 2 \text{ مربع } 6 - \frac{3}{4} + 2 \text{ مربع}$$



$$- 6 - \frac{c}{1-c} = \frac{c}{1-c} \text{ مثل } 1, 4, 6, c = -\frac{1-c}{2} +$$

$$\sqrt{\frac{2(1-c)}{4}} + c^2 \text{ وتسمى السادسة}$$

$$- 7 - \frac{c}{1-c} = \frac{1-c}{1-c} \text{ مثل } 6, 8, 9, c = \frac{1-c}{c} \text{ وتسمى السابعة}$$

$$- 8 - \frac{c}{1-c} = \frac{1-c}{1-c} \text{ مثل } 6, 7, 9, c = \frac{c^2 + 1 - c}{c}$$

وتسمى الثامنة

$$- 9 - \frac{c}{1-c} = \frac{c}{1-c} \text{ مثل } 4, 6, 7, c = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{14 - c^3}{2}}$$

وتسمى التاسعة

$$- 10 - \frac{c}{1-c} = \frac{1}{c} \text{ مثل } 5, 3, 2, c = 1 - c$$

المقالة الأولى

خواص العدد





بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## الفن الثاني

من كتاب النفاذ في جملة الرياضيات

### الأرثماطيقى

#### المقالة الأولى - خواص العدد

قصدا أن نصل بما قدمناه من العلوم التعاليمية الفن المعروف بالأرثماطيقى وما جرت العادة بإيراده فيه وعلى الوجه الذى جرت به . على أن كتاب الاسطقسات قد أعطى أصولا كثيرة في علم العدد ، ومعول هذا الفن عند التحصيل على تلك الأصول ، وقد يمكن أن ينقل كثير من الأشكال الهندسية التى تتعلق بالضرب والقسمة وبأحوال النسبة إلى العدد ، فتقرر منه أحكام هذا الكتاب ، وذلك إليك :

١٠

أما ماهية العدد فقد عرفت في كتاب قاطيغورياس منه أمراً ، ولوح لك في كتاب الاسطقسات إليه إشارة ، وسيرد عليك في العلم الأعلى منه تحقيق ، وكذلك الحال من قسميه اللذين هما الزوج والفرد ، وقد عرفت من كتاب الاسطقسات الأول والمركب مطلقين ، والأول والمركب بالإضافة ، وعرفت زوج الزوج وزوج الفرد ، وزوج الزوج والفرد ، وعرفت العدد التام والناقص والزائد ، فليس يلزمنا لك استئناف ذكر هذه الأمور ، بل أن يتكلف لك إيراد الخواص .

١٥

(٧) جرت به : جمعت به (ب) .

(١٠) فتقرر تنفرد (ب)

(١٣) من قسميه حافظة (ب)

(١٦) لهذه الأمور : لهذه الأصول (ب) .

ولنذكر خواص العدد مطلقا ، فأولها وأدهرها أن كل عدد فإنه نصف حاشيته ،  
وهما عددان يليانه من جهة جانب القلة والكثرة ( من بعد سواء ) ، مثال ذلك الخمسة  
فإنها نصف ستة وأربعة ، ونصف سبعة وثلاثة ، ونصف ثمانية واثنين ، ونصف واحد  
وتسعة ، فيكون ضعفها مساويا لحاشيتها ، ونصفها لربع حاشيتها . وكل عدد فإن مربعه  
مساو لمضروب حاشيته القريبتين إحداهما في الأخرى مع زيادة واحد ، مثل مربع اثنين  
فإنه من ضرب ثلاثة في واحد وزيادة واحد ، ومثل مربع ثلاثة فإنه ضرب أربعة في  
اثنين وزيادة واحد ، ومثل مربع أربعة فإنه ضرب ثلاثة وخمسة وزيادة واحد .

بل نقول إن كل عدد فإن مربعه يزيد على مسطح حاشيته أيهما كان في الآخر  
بمربع عدد المراتب بينهما ، فإن كانت الحاشيتان القريبتان بالمرتبة هي الأولى فتريد  
بمربع الواحد ، فإن كانتا ثانيتين زاد بمربع الاثنين ، وإن كانتا ثالثتين زاد بمربع ثلاثة ،  
وكل عدد فإن بعده من المراتب من ضعفه . أما إن أخذته في أول المراتب فمثل عدده  
وزيادة واحد ، وأما إن أخذت أول المراتب بعده ، فبعده بما فيه من الآحاد ، مثاله أن  
بين أربعة وثمانية تارة أربعة خمسة ستة سبعة ثمانية ، فذلك خمسة وهو يزيد عليه  
بواحد ، وتارة خمسة ستة سبعة ثمانية ، وذلك مثل أعدادة وما فيه من الآحاد .

كل عدد فإن بعده من ضعفه إذا لم يؤخذ هو مثل مضروبه في واحد ، وإن أخذ  
هو في المراتب فمثل ذلك وزيادة واحد .

كل عدد فإن بعده من ثلاثة أضعافه فهو بمقدار آحاده مضروبة في اثنين إما بزيادة  
واحد أو من غير زيادة واحد على ما علمت قبل ، مثل اثنين فإن بعده من ستة هو  
مضروبه في اثنين ، ثم بزيادة واحد أو غير زيادة ، وبعد ثلاثة من ثلاثة أمثاله وهو  
بعد مضروبه في اثنين ثم بزيادة وبغير زيادة ، وكذلك فإن كل عدد فإن بعده من  
أربعة أضعافه هو بمقدار مضروبه في ثلاثة من العدد بزيادة أو غير زيادة ، وبالحملة  
فالبعد من كل موضع هو أن ينقص من مسمى الأضعاف واحد ويضرب العدد فيما بقي  
ثم يزداد أو لا يزداد .

وكل عدد فإن بعده من مربعه بمقدار مضروبه في العدد الذي قبله ، ثم يزداد واحد  
أو لا يزداد ، مثل مضروب الاثنين في واحد فهو بعده من مربعه إذا لم يزد ، ومضروب  
الثلاثة في الاثنين فإنه بعد الثلاثة من مربعه إذا لم يزد ، وكذلك لكل عدد فإن بعده عن

( ٤ ) فيكون ضعفها : فيكون ضعفه ( سا ) . ونصفها لربع : ساقطة في ( سا ) .

( ١٢ ) مثاله : مثلا في ( سا ) .

مضروبه في العدد الذي قبله هو مربع العدد الذي قبله إذا زيد واحد ، مثاله أن بعد الثلاثة عن مضروبه في اثنين بعدد مربع اثنين إذا زيد عليه واحد وبعد الأربعة عن مضروبه في ثلاثة أعني به إذا زيد عليه واحد ،

وكل عدد فإن بعده عن مضروبه في العدد الذي بعده بعدد مربعه ،

- وكل عدد فإن بعده من مكعبه بأحد ما يبقى من مكعبه بعد نقصانه منه ، فإن بين اثنين ومكعبه ستة ، وبين ثلاثة ومكعبها أربعة وعشرون ، وبين أربعة ومكعبه ستون ، وكذلك هلم جرا ، وكذلك مع مال ماله ،

- وأيضاً فإن كل عدد فينبه وبين مكعبه من المراتب مضروبة في الذي يليه ، ثم مضروب ذلك كله في الذي قبله ، مثل اثنين في ثلاثة ثم في واحد ، وثلاثة في أربعة ثم في اثنين ، وأربعة في خمسة ثم في ثلاثة ، وخمسة في ستة ثم في أربعة . ١٠

وكل عدد فينبه وبين مال ماله مثل مضروب مربعه مجموعاً إلى العدد الذي يتلو ذلك العدد ، ثم مضروباً في مضروب ذلك العدد في الذي قبله ، مثل ما بين مال مال اثنين وهو ستة عشر وبنه وهي أربعة عشر ، ويحدث من ضرب مربع اثنين مجموعها مع ثلاثة في مضروب اثنين في واحد ، وكذلك على الولاء وليقتصر على دوماً .

- ولنعبد إلى اعتبار خواص الأعداد المتوالية — كل عدد فإن مربعه إذا ضوعف ١٥ وزيد عليه اثنان فهو مساو لمجموع مربعي حاشيتيه القريبتين ، مثاله ضعف مربع عشرة بزيادة اثنين وهو مائتان واثنان فإنه مساو لمضروب تسعة في نفسه وهو واحد وثمانون ومضروب أحد عشر في نفسه وهو مائة واحد وعشرون وهما مائتان واثنان ؛ كل عدد فإن مـ به إذا ضوعف وزيد عليه ثمانية فإنه مساو لمربعي حاشيتيه الثانيتين ، مثاله عشرة فإن مربعه إذا فعل به ذلك كان مائتين وثمانية وهو مساو لمضروب ثمانية في نفسه واثنى عشر في نفسه . كل عدد فإنه إذا ضوعف مربعه وزيد عليه ثمانية عشر كان مساوياً لمربعي حاشيته التاليتين ، مثاله مائتان وثمانية عشر ، فإنه مساو لمضرب سبعة في نفسه وثلاثة عشر :

(٦) وكذلك : وكذلك وكل عدد فإن مربعه مساو لمضروب العدد الذي بعده في العدد الذي قبله بزيادة واحد مثل الإثنين فإن مربعه مساو لمضروب الثلاثة في الواحد وزيادة واحد ، ومربع الثلاثة فإنه مساو لمضروب الأربعة في الاثنين وزيادة واحد (ب) و(سا) : هذا الكلام موجود في صفحة ٢ ابتداء من سطر .

(١٧) وهي مائتان واثنان : ساقطة في (سا) .

(٢١) مساوياً لمربع ، مساوياً لمضروب (سا) .

وأما في الحاشيتين الرابعةين فالزيادة اثنان وثلاثون وفي الحاشيتين الخامسةين الزيادة خمسون

والقانون فيه أن الزيادة الأولى مضروب الزوج الأول في أول فرد وهو الواحد ، والزيادة الثانية على هذه الزيادة مضروب الزوج الأول في الفرد الذي يتلو الواحد وهو ثلاثة ، والزيادة الثالثة على الزيادات المجتمعة مضروب اثنين في الفرد الثالث الواحد . وكذلك كل مربع فإن عدده إذا ضعف وزيد عليه أربعة كان مساويا لمسطحي حاشيتين نازلتين وحاشيتين صاعدتين إذا جمعا ، مثاله مائتان وأربعة فإنه مساو لمضروب تسعة في ثمانية وأحد عشر في أنفي عشر . وأما المسطحان اللذان يتلوان ذينك من ضرب الحاشية النازلة الثانية في النازلة الثالثة والصاعدة الثانية في الصاعدة الثالثة فيزيدان على ضعف ذلك باثني عشر والذي يتلوها يزيدان على الضعف بأربعة وعشرين واللذان يتلوانه بأربعين .

والقانون في ذلك أن تضرب الزيادة وهي أربعة في أول الفرد وهو واحد فيكون أربعة فيزداد ثم تضرب الزيادة في الزوج الأول فيكون ثمانية فيزداد ثم تضرب في العدد الذي يتلوه وهو ثلاثة فيكون اثنا عشر فيزداد ثم يضرب في الذي يتلوه وهو أربعة فيكون ستة عشر فيزداد كل عدد فإن ضعف مربعه إذا زيد عليه ستة مساو لمسطح حاشيته النازلة القريبة في حاشية النازلة التالية ومسطح حاشيته الصاعدة القريبة في حاشيته الصاعدة الثالثة ، مثاله مائتان وستة فإنه مساو لمضروب تسعة في سبعة وأحد عشر في ثلاثة عشر ، فإن ضربت القريبة في كل جهتيه في الرابعة كانت الزيادة ثمانية ولا تزال الزيادات تتفاوت باثني اثنين كل عدد فإن ضعف مربعه إذا زيد عليه ستة عشر كان مساويا لمسطح الحاشية الثانية النازلة في الرابعة النازلة ، والثانية الصاعدة في الرابعة الصاعدة ، ومثاله مجموع مسطحي ثمانية في ستة واثني عشر في أربعة عشر فذلك مائتان وستة عشر ، فإن ضربت الثانية في الخامسةين كانت الزيادة عشرين ، فإن ضربتها في السادسةين كانت الزيادة أربعة وعشرين ، وكذلك يستمر بتفاوت أربعة . فإن كانت الحاشيتان الثالثة ضربا أولا في الخامسةين كانت الزيادة ثلاثين فإن ضربتهما في السادسةين كانت الزيادة ستة وثلاثين ، فإن ضربتهما في السابعةين كانت الزيادة اثنين وأربعين ، فلا تزال الزيادات تستدر ستة ستة ، وعلى هذا القانون فيما وراء ذلك من الحواشي :

( ١ ) إثنان وثلاثون : إثنان وعشرون ( سا ) : وهي خطأ .

( ٢١ ) كانت الزيادة عشرين : كانت الزيادة عشرين عشرين ( سا ) .

( ٢٢ ) السادسةين ( ب ) : في السادس ( سا ) .

( ٢٤ ) كانت الزيادة ستة وثلاثين نان ضربتهما في السابعتين : ساقطة في ( سا ) .

ونبدأ لك بخواص الأعداد المتوالية تواليها الطبيعي، فنقول إن مراتبها لا تخلو إما أن تكون فردا وإما أن تكون زوجا، فإن كان فردا وجد لها واسطة لاحتمال، وهذه الواسطة تكون دائما نصف الحاشيتين مجموعتين. وأعني بالحاشيتين عددين أو عددا ووحدة بعدهما في الترتيب بعد الواسطة وسواء أحدهما من جانب النقصان والأخرى من جانب الزيادة، مثل التسعة والواحد فهما حاشيتا الخمسة والخمسة نصف مجموعتهما، وهي أيضا نصف الثمانية والاثنتين. وإنهما أيضا حاشيتان، ونصف السبعة والثلاثة والستة والأربعة كذلك، وأقرب حاشيتيهما الستة والأربعة وأبعدهما التسعة والواحد: وكل عدد هو واسطة فهو نصفهما وإن كانت المراتب زوجا حتى كان بدل الواسطة الواحدة واسطتان كانت الواسطتان مجموعتين مثل أى حاشيتين جمعنا، مثل الأربعة والخمسة من الواحد إلى الثمانية، فإنهما مجموعان متساويان للواحد والثمانية، وللاثنتين والسبعة، والثلاثة والستة، ويلزم ١٠ في جميع هذا أن تكون كل حاشيتي عدد مساويتين للآخرين نظيرتهما:

ومن الخواص المتعلقة لجميع ذوات المراتب أنا إذا زدنا على مبلغ العدد الأخير المبتدئ من الواحد واحدا وضربناه في نصف عدد المراتب كان الحاصل مساويا لجملة الجميع، مثاله لتكن آخر المراتب أربعة فلنك إذا زدنا على الأربعة واحدا فكان خمسة فضربته في نصف عدد المراتب الذي هو أربعة ونصفه اثنان بلغ عشرة وهو ١٥ مجموع ما بين الواحد والأربعة، فإن أردت من الواحد إلى الخمسة زدنا على الخمسة واحدا فصار ستة فضربته في نصف عدد المراتب وهو اثنان ونصف فبلغ خمسة عشر، وأيضا فلن مجموع كل طرفي ترتيب كان من الواحد أو من غيره إذا ضرب في نصف المراتب أو ضرب نصفه في جميع المراتب كان ما يجتمع مثل جملة مجموع تلك المراتب، فليكن أول المراتب اثنين وآخرها ستة وبجمعهما فيكون ٧ ثمانية فتضربه في نصف عدد المراتب وهو اثنان ونصف فيكون عشرين أو تضرب نصفه في تمام عدد المراتب فتكون أربعة في خمسة وذلك عشرون، وهو مساو لمجموع اثنين، ثلاثة، أربعة، خمسة، ستة.

(١) ونبدأ : ساقطة في (ب) .

(٣) أر عدد ووحدة : ساقطة في (ب) .

(١٦) الواحد والأربعة : الواحد إلى الأربعة (ب) .

(١٧) فضربه : فضرب (ب) .

(٢١) فيكون عشرون : وهو عشرون (ما) .

ومن الخواص المتعلقة بالجمع أن كل أعداد متتالية ليست تقال الزيادة بالآحاد بل بالاثنا عشر والثلاثيات أو غير ذلك بعد أن يستمر على سنن واحد ، وليكن ابتداءها من حيث كان فإن مضروب عدد المراتب منقوصا منه واحد في العدد الذى يقع به التفاضل كالاثنا عشر والثلاثية أو غير ذلك مما تتفاضل به المراتب مزيدا عليه العدد المبتدأ منه مساويا للعدد الأخير ، فإن زيد مرة أخرى وضرب في عدد المراتب كما هو كان مثل ضعف جملة مجموع الأعداد ، ومثاله لو قل لك قائل خمسة أعداد متتالية تبتدىء من الأربعة وبين كل عددين ثلاثة حتى يكون التفاضل بأربعة أربعة ، ما آخرها وكم مجموعها ؟ فإذا نقصت واحدا من الخمسة حتى حصل لك أربعة ، فضربته في عدد التفاضل وهو أربعة كان ستة عشر ، فإذا زدت عليها أولها كان عشرين ، فقد خرج لك العدد الأخير . لأن مراتب الأعداد تكون أربعة ثم ثمانية ثم اثني عشر ثم ستة عشر ثم عشرين ، فإذا زدت على عشرين أربعة أيضا كان أربعة وعشرين ، فإن شئت اضربه في خمسة فيكون مائة وعشرين فخذ نصفه فهو مجموع المراتب ، وإن شئت اضرب نصفه في المراتب أو جميعه في نصف المراتب ، وكيفما يعمل فهو جواب المسألة .

ومن الخواص المتعلقة بالجمع أن كل أعداد متتالية تبتدىء من الواحد ، وإذا جمعت مبتدأة من الواحد إلى آخرها ، ثم مرجوعا من آخرها إلى الواحد ، مثل واحد ، اثنين ، ثلاثة ، أربعة ، ثلاثة ، اثنين ، واحد فمجموعها مساو لمربع العدد الأخير فإن مجموع ما مثلنا به ستة عشر . وتحصيل هذا أن ضعف مجموع الأعداد التى دون المرتبة الأخيرة مع الذى في المرتبة الأخيرة مساو لمربع العدد الأخير .

ومن الخواص المتعلقة بالجمع أنك إذا جمعت أعدادا متوالية من الواحد ، فالمجموع الأول مثل ونصف العدد الأخير ، والمجموع الثانى ضعف العدد الأخير ، والمجموع الثالث ضعف ونصف العدد الأخير ، والمجموع الرابع ثلاثة أضعاف العدد الأخير ، والمجموع الخامس ثلاثة أضعاف ونصف العدد الأخير ، وكذلك إلى غير نهاية . مثاله واحد ، اثنان ، فإنه مثل ونصف الاثنان وواحد ، اثنان ، ثلاثة ، فإنه ضعف ثلاثة ، وواحد ، اثنان ثلاثة ، أربعة ، فإنه ضعف ونصف الأربعة ، وواحد ، اثنان ، ثلاثة ، أربعة ، خمسة . فإنه ثلاثة أضعاف خمسة ، وواحد ، اثنان ، ثلاثة ، أربعة ، خمسة ، ستة ، فإنه ثلاثة أضعاف ونصف ستة .

(١١) ثم عشرين : ساقطة من (د) .

(١٦) العدد الأخير : العدد ساقطة (سا) ، (پ) .

وأيضا فإن كل أعداد متوالية نجمعها بهذا الجمع، فإن المجموع الأول يكون مثل العدد الذى يتلوه والمجموع الثانى مثل ونصف للعدد الذى يتلوه والمجموع الثالث ضعف العدد الذى يتلوه ، وكذلك إلى غير النهاية مثاله أن الواحد والاثني عشر مثل ثلاثة ، والواحد والاثني عشر مثل ونصف أربعة ، فإن زدت أربعة كان ضعف خمسة . وإن زدت خمسة كان ضعف وستة .

- ومن الخواص المتعلقة بالجمع أنك إذا جمعت أفرادا متوالية مبتدأة من الواحد وجمعت بعدها أزواجا متتالية من الاثنى عشر بعدها ، فإن المجموع الأول من الأزواج يكون مثل ونصف المجموع الأول من الأفراد ، والمجموع الثانى مثل وثلاثة ، والمجموع الثالث مثل وربعه ، ويكون كل مجموع زائدا ، وسمى عدد مراتبه ، ويكون عدده عدد مراتبه ، مثاله الاثنان والأربعة تزيد على الواحد ، والثلاثة نصفه فإن زدت هناك ستة وها هنا خمسة ، يصير مثل وثلاث هذا . ولنعد الآن إلى إيراد خواص أول قسمى العدد من حيث كيفية انقسامه إلى متساويين وغير متساويين ، وهو الزوج والفرد : ولنورد ما نصرح به من كتاب الاسطقات ، وقد تجرى بينهما مشاركة مستفادة من جنسهما ، وذلك فيما تتنالى من الأفراد والأزواج تاليا طبيعيا إلى أنواع العدد ، وذلك كله أن تكون المراتب متفاضلة بتفاضل واحد ، أما تفاضل التالى الطبيعى لأنواع العدد فبالواحد ، وأما تفاضل الأفراد والأزواج المتتالية بالطبع فبأثنين اثنين إذا كان كل فرد إذا زيد عليه واحد صار زوجا ، ثم إذا زيد عليه واحد صار فردا ، ثم إذا زيد عليه واحد صار زوجا ، فيكون بين الفرد والفرد الذى يليه اثنان ، وبين الزوج والزوج الذى يليه اثنان ، فيجب أن يكون كل وسط فى مراتب الأفراد التى على الولاء الطبيعى ، ومراتب الأزواج الذى على ذلك الولاء مثل نصف مجموع أى حاشيتين كانتا لأنهما حاشيتا تلك الواسطة بعينها فى النظام الطبيعى للعدد ، وكل واسطتين مجموعتين مثل كل حاشيتين مجموعتين ، لأن تلك الواسطتين تكونان حاشيتين للعدد الواقع فى النظام للعددين بينهما ، فيجب أن يساوى مجموعهما مجموع تلك الحاشيتين الآخرين على ماسلف بيانه ، وليست هذه الحال جارية بين الأفراد المتتالية والأزواج المتتالية فقط ، بل بين

(٥، ٤) وإن زدت خمسة كان ضعف ونصف ستة .

(٦) ومن الخواص المتعلقة بالجمع أنك إذا جمعت : ساقطة فى (د) .

(٩) الثالث : الرابع (ب) .

(١١) وها هنا خمسة يصير مثل وثلاث هذا : ساقطة فى (د) .

كل أعداد فيهما تفاضل بمتساو ، فلذلك توجد بهذه الخاصية أيضاً في نظام مراتب أزواج الفرد فهذه مشاركة وجب أن نعتها قبل الحوض فيها .

فلتجرد الآن لذكر الخواص ولنبدأ بخواص الفرد فنقول إنها الخواص المعلومة المذكورة من أنها لاتركب عن أزواج ألينة ولا عن أفراد بعدد زوج ، ولا يوجد فيها من جنسها عدد يعنى مابعد من جنسها ولا يوجد فيها من جنس مة بلها عدد يعنى مابعد من جنسها وماجرى مجرى هذه الخواص . فلنقتصر على ما قيل في كتاب لاسطقسات ، ولنذكر من خواصها خواص تتعلق بنظام متالياتها على الولاء ، فمن خواصها أن مجموعها من الواحد على الولاء يكون مربعا أبداً ، مثل الواحد والثلاثة ، ثم الواحد والثلاثة والخمسة ، ثم الواحد والثلاثة والسبعة ، ثم الواحد والثلاثة والخمسة والسبعة والتسعة . ومن خواصها أن كل مربع من هذه فضلعه عدد المراتب ، مثل الأربعة فهو مجموع مرتبتين فجذرها اثنان ، والتسعة فهو مجموع ثلاث مراتب ، فجذرها ثلاث . ومن خواصها أنك إذا أردت أن تعرف مبلغ عدد يقع في مرتبة معلومة من الواحد مثلاً كالعاشرة والحادية عشر وغير ذلك ، فاضرب عدد المرتبة ولكن العاشرة ، وعددها عشرة في اثنين فيكون عشرين ، فانقص منه واحداً فيكون تسعة عشر فهو عدد المرتبة العاشرة .

وأما حال الواسطة والواسطتين مع الحاشيتين فهو على ما علمت ، ومن خواصه أن كل واحد من الآحاد يرجع فيه سادسه ، مثاله أن الواحد يرجع في السادس وهو الحادى عشر ، ثم بعد السادس وهو الواحد والعشرون ، والثلاثة يرجع في السادس وهو الثالث عشر وكذلك إلى غير نهاية .

ومن خواصه أن كل فرد أول إذا تخطى على عدته انتهى إلى مركب ، مثل الثلاثة فإن الثالث منه وهو تسعة مركب ، والخمسة فإن الخامس منه وهو خمسة عشر مركب . وخاصة أخرى أن أول الأعداد الغير المركبة وهو ثلاثة يؤدى بالتخطى الأول إلى مجذور ثم لا يؤدى إلى غير نهاية ، والثاني وهو الخمسة يؤدى بالتخطى الثاني إلى مجذور عند خمسة

(٥) جنس : ساقطة (د) .

(٩) ثم الواحد والثلاثة والخمسة والسبعة ثم الواحد والثلاثة والخمسة والسبعة والتسعة : ساقطة

من (ب) ويوجد بدلها ثم السبعة والتسعة .

(١٦) حل ما علمت . حل ما علمت وما سلف (سا) .

(١٨) وهو الحادى عشر ثم بعد السادس وهو الواحد والعشرون ، والثلاثة يرجع في السادس :

ساقطة في (سا) . - وكذلك : وكذلك إلى غير نهاية (ب) .



وعشرين ثم لا يؤدي ، وكذلك إلى غير نهاية . وخاصية أخرى أن الرابع بعد الجذور الأول وهو الواحد مجذور وهو التسعة ، والثامن بعد الجذور الثاني ، والثاني عشر بعد الجذور الثالث ، والسادس عشر بعد الجذور الرابع بزيادة أربعة أربعة ، وكل بيت ومرتبته يقع فيه مجذور فيكون مبالغ ذلك المجذور مساويا لضعف عدد البيت والمرتبته مزيداً عليه واحد فإن العدد المربع الأول هو تسعة وهو في المرتبة الرابعة من الأعداد الأفراد و ضعف الأربعة ثمانية مزيداً عليه واحد ، البيت الثاني عشر من الثلاثة تقع فيه خمس وعشرون وهو مساو لضعف اثني عشر مزيداً عليه واحد فإذا بنينا من الأفراد المتتالية بالطبع جدولاً مربعاً ظهرت هناك خواص من حيث التشكيل وكذلك إذا بنينا جدولاً مثلثاً ، فلنبدأ بالمربع ولنجعله خمسة

٩	٧	٥	٣	١
١٩	١٧	١٥	١٣	١١
٢٩	٢٧	٢٥	٢٣	٢١
٣٩	٣٧	٣٥	٣٣	٣١
٤٩	٤٧	٤٥	٤٣	٤١

١٠

فنقول إن كل صليب منه كان قطر الشكل أو لم يكن ، كان مجموعا القطرين متساويين أما الذي على القطر فإن مجموع كل واحد من القطرين من هذا الشكل مائة وخمس وعشرون ، وأما الذي ليس على القطر فمثل الصليب الذي من سطرين أحدهما ثلاثة ، خمسة عشر ، سبعة وعشرون ، والثاني سبعة خمسة عشر ثلاثة وعشرين ، فإن كل واحد من قطر خمسة وأربعين ، ونجد مجموع طرفي سطر كل صليب مساويا لمجموع طرفي السطر الأخير ، ونجد مجموع بيوت كل مربع من هذه الأعداد على تواليها يساوي مربع مربع عدد بيوت الضلع . فلذلك إن بنيت مربعا ضلعه اثنان فكان لإعدادة واحد ثلاثة خمسة سبعة هكذا كان جميع ذلك ستة عشر وهو مربع مربع اثنين ،

٢٠

٣	١
٧	٥

فإن كان ضلعه من ثلاثة بيوت حتى كانت أعداده واحدا ، ثلاثة ، خمسة ، سبعة ، تسعة ، أحد عشر ، ثلاثة عشر ، خمسة عشر ، سبعة عشر ، هكذا .

٥	٣	١
١١	٩	٧
١٧	١٥	١٣

فمبلغ جميع ذلك واحد وثمانون وهو مربع مربع الثلاثة ، ونجد القطر في جميع ذلك يساوي مكعب ذلك العدد ، ومثاله في الجدول الأكبر فإن بيوت خمسة وقطره مائة وخمسة وعشرون ، وفي الثاني قطره ثمانية ، وفي الثلاثي قطره سبعة وعشرون .

وكذلك فإن بنيت منها شكلا مثلثا على هذه الصورة وجلت جميع الأعداد والتي

تنزل من الواحد إلى مسقط العمود مربعات مائة على الولا وجلت مجموع مافي صف

					١
				٥	٣
			١١	٩	٧
		١٩	١٧	١٥	١٣
	٢٩	٢٧	٢٥	٢٣	٢١

واحد عرضا عددا مكعبا مثل مجموع ثلاثة وخمسة ومجموع سبعة وتسعة وأحد عشر :

وأما العدد الزوج فقد عرفت في كتاب الاسطقسات منه ما عرفت ، ونشير لك إلى

خواص يلزم مراتبها منها أنك تجد مجموع مراتبها مساويا لمربع عددها مركبا إليه ضلعه ،

مثل أنك إذا ابتدأت من الاثنين وأضفت إليه الأربعة كانت ستة ، وهو مثل مربع عدد

المراتب ، ومثل أنك إذا ابتدأت من الاثنين فأضفت إليه الأربعة والسته كان اثني عشر ،

وهو مثل مربع الثلاثة ومثل ضلعه .

ومن خواصها أن كل زوج يزيد على الأول من الأفراد بواحد ، فإن ذلك الزوج

مساو لمجموع أجزاء مربع ذلك الأول ، مثل الأربعة فإنها تزيد على الفرد الأول وهو

(١) ضلعه من ثلاثة بيوت ساقطة في (سا) ، (ب) .

الثلاثة بواحد ، ومربع الثلاثة تسعة ، ولهما من الأجزاء جزآن تسع وثلاث ، ومجموعهما مساو للأربعة ، وأيضا الستة تزيد على الفرد الأول بواحد وذلك الفرد الأول خمسة ، ومربع الفرد الأول خمسة وعشرون ، وله من الأجزاء خمس وخميس خمس لاغير ومبلغه ستة ، فإن كان الزوج بحيث إذا نقص منه ثلاثة بقي فرد أول ، فإن ذلك الزوج مركب من أجزاء ضعف ذلك الفرد مثل الثمانية فإنها إذا نقص منها ثلاثة بقي خمسة وضعفها عشرة ولها نصف وخمس وعشر ، مجموع ذلك ثمانية ، أعني مجموع الخمسة والاثنين والواحد .

فلتتكم الآن في خواص أنواع الزوج وأنواع الفرد . ولنبدأ بخواص أنواع الزوج فإن تنويعها أقرب إلى أن يكون تنوعا فصل من تنوع أنواع الفرد . ولنبدأ بخواص زوج الزوج فه أبط ، وقد علمت كيفية لإنشائه على سبيل التضعيف وخواص أخرى مما هي له في كتاب الاسطقات : فمن خواص زوج الزوج ما هو فرع خواص ذكرت في الاسطقات ، أنه لا جزء له سمي العدد الفرد أو زوج غير زوج الزوج ولا زوج زوج أقل منه إلا وهو بعده ، وكل زوج زوج فمربعه زوج الزوج ، وإذا نقص منه الزوج الأول وهواثنان خرج زوج الفرد كالثمانية تنقص منه الإثنان فيخرج زوج الفرد وهو ستة ، وكل زوج زوج فهو ناقص ونقصانه بواحد .

ومن خواص زوج الزوج أن مراتبه تتنالى على نسبة متشابهة هندسية إذا كانت تتوالى على التضعيف ، فلا تكون تفاضلا بمساو بل يكون كل فضل مساويا للمفضول عليه ، ويكون الفضول متفاضلا فيما بينها ذلك التفاضل بعينه . ويلزم من وقوع مراتبها على النسبة الواحدة أن تكون متناسبة إذا قطعت ومتناسبة إذا ردت إلى المساواة . فيلزم أن يكون مضروب أى واسطة أخذت في نفسها كمضروب إحدى الحاشيتين في ٢٠ الأخرى ، إذ نسبة الحاشية الصغرى إلى الواسطة تكون كنسبة الواسطة إلى الحاشية الأخرى ، ويلزم أن يكون مضروب إحدى الواسطتين في الأخرى كمضروب إحدى الحاشيتين في الأخرى ، لأن نسبة الحاشية الصغرى إلى الواسطة الصغرى كنسبة الواسطة الكبرى إلى الحاشية الكبرى . ولتكن المراتب : اثنان أربعة ثمانية ستة عشر اثنان وثلاثين أربعة وستين ، فتجد أربعة في نفسها كاثنتين في ثمانية ، وثمانية في نفسها ٢٥ كاثنتين في اثنان وثلاثين ، وأربعة في ستة عشر ، ونجد أربعة في ثمانية كاثنتين في ستة عشر ، وثمانية في ستة عشر كأربعة في اثنان وثلاثين واثنتين في أربعة وستين .

ولما كانت أعداد زوج الزوج منتظمة على نسبة متصلة وجب أن يكون للمربعات والمكعبات منها نظام في أن المربع يكون ثلثه مربعا والمكعب رابعة مكعب وتستمر كذلك . ومن خواصها أن الأعداد الثامنة تنشأ منها .

- أما الأعداد المتحابة فهي الأعداد التي يتركب كل واحد من أجزاء صاحبه كما يتركب صاحبه من أجزاء ، مثل مائتين وعشرين مع مائتين وأربعة وثمانين فإن للمائتين والأربعة والثمانين من الأجزاء النصف وهو ١٤٢ ، والرابع وهو ٧١ ، وله جزء من واحد وسبعين وهو ٤ ، وله جزء من مائة واثني وأربعين وهو ٢ ، وله جزء من مائتين وأربعة وثمانين ، وهو ١ . وإذا جمعت هذه الأجزاء تكون مائتين وعشرين . أما أجزاء مائتين وعشرين فله النصف وهو ١١٠ ، وله الربع وهو ٥٥ ، وله الخمس ٤٤ ، وله العشر ٢٢ ، وله جزء من أحد عشر وهو ٢٠ ، وله جزء من عشرين وهو ١١ ، وله جزء من اثنين وعشرين وهو ١٠ ، وله جزء من أربعة وأربعين وهو خمسة ، وله جزء من خمسة وخمسين وهو ٤ ، وله جزء من مائة وعشرة وهو ٢ ، وله جزء من مائتين وعشرين وهو ١ ، وإذا جمعت هذه الأجزاء تكون مائتين وأربعة وثمانين ، وليس الواحد منها من الأجزاء غير ما ذكرنا .
- وإذا جمعت أعداد زوج الزوج والواحد معهما فاجتمع عدد أول بشرط أن يكون إذا زيد عليهما آخرها ونقص الذي قبله كان المبلغ بعد الزيادة والمبلغ بعد النقصان أوليا فضرب المبلغ المزيد عليه في المبلغ المنقوص ثم ضرب ما اجتمع في آخر المجموعات حصل عدده حبيب ، وحبيبه العدد الذي يكون من زيادة مجموع الزائد والناقص المذكورين ضربا في آخر المجموعات على العدد الموجود أولا الذي له حبيب وهما متحابان .

- وأما خواص زوج الفرد فقد عرفنا في كتاب الاسطقسات ما عرفنا ، ولا ح في جملتها أنه لا بعدها زوج إلا بفرد ولا فرد إلا بزواج ، وجزء الزوج سمي الفرد كالأثنين ثلث الستة ، وجزء الفرد سمي الزوج كالثلاثة نصف الستة ، وإن زيادة الزوج الأول وهو الاثنان عليه يخرج زوج الزوج فعلم أن أنشأه من ضرب الأفراد المتوالية في اثنين ، فيعلم من ذلك أن الواقع بين مرتبة وبين التي تليها ضعف الواقع كان في الأفراد والطبيعية فيكون تفاضل مراتبها بأربعة أربعة وأنه لا مجذور فيها ولا مكعب فإن كل مجذور مكعب إما فرد يعد بفرد بعدد فرد وإما زوج يعد بزواج بعدد زوج ، وقد عرفت

هكذا ، ولما كان التفاضل بأربعة أربعة ويبدأ إما من الاثنين وإما من الستة على ما نشرح الحال منه ، والاثنان إذا زيد عليه أربعة كان ستة وإذا ، زيد على ستة أربعة كان عشرة ، وإذا زيد عليه أربعة كان أربعة عشر ، وإذا زيد عليه أربعة كان ثمانية عشر ، وإذا زيد عليه أربعة كان اثنين وعشرين ، فعاد إلى الاثنين عودا بدور ، ووجب أن يكون مدار آحاده على هذا النظام : اثنان ، ستة ، عشرة ، أربعة عشر ، ثمانية عشر ، اثنان وعشرون ، ولا يوجد فيها من الآحاد غير ذلك ، ووجب أن يكون كل سادس يشبه الأول في آحاده أو صفره ، وإذا جعلت إبتداء المراتب من الستة وللاستة ثلث صحيح هو اثنان ، فإذا ابتدأت بعد الستة وجب للثالث بعدها وهو ثمانية عشر ثلث صحيح ، وللثالث بعد الثمانية عشر وهو الثلاثون ثلث صحيح وكذلك إلى غير نهاية ، وبعد الستة العشرة وجزؤه سمي الفرد الذي يعد الثلاثة وهو الخمسة ١٠ فإن للعشرة خمسا صحيحا ، فإذا ابتدأت بعد العشرة فتجد المشتق له الاسم من ذلك العدد وهو الخامس له خمس صحيح ، وكذلك إلى حيث أردت ، والعدد الذي بعد العشرة وهو الأربعة عشر وجزؤه سمي الفرد الذي يلي الخمسة وهو السبعة فله سبع ويوجد السابع إذا ابتدأ بعده كذلك .

ومن خواص هذه المراتب أن جمع الاثنين ، وهو أول زوج فرد مع كل مرتبة ١٥ يكون سميها عددا مربعا ، يخرج عددا مربعا مثل جمعها مع الرابع منها وهو أربعة عشر ومع التاسع منها وهو أربعة وثلاثون الذي يلي الاثنين وهو الستة وهو زوج الفرد الثاني إذا جمع مع عدد كل مرتبة مبتدأة من الواحد فيشتق لها اسم من عدد مربع كان المجموع مربعا مثل الستة مع الرابع وهو العشرة ومع التاسع وهو الثلاثون . ومن ذلك أن مضروب سمي كل مرتبة في أربعة إذا أتى منه ٢٠ العدد الأول كان عدد تلك المرتبة ، مثاله أن البيت الرابع سميها أربعة فإذا ضرب في أربعة كان ستة عشر سقط منه الأول وهو الاثنان فيكون أربعة عشر ويمكنك أن تعكس هذا وتقول إن كل عدد منها إذا زيد عليه اثنان وقسم على أربعة فخرج فهو عدد مرتبته من الأول .

ومن ذلك أن ضعف مضروب عدد المراتب في نفسها مساو لمجموع ٢٥ أعدادها ، وليكن أربعة ، وضعف مضروبها في نفسها اثنان وثلاثون فذلك مجموع ٢ ، ٦ ، ١٠ ، ١٤ ، ومن ذلك أن مجموع الأول والثاني مكعب ثم لا مكعب في مجموعها إلا ما يوازي مكعب ثمانية ، وأنت تعرفه وتعرف مرتبته بما علمت ثم مكعب مكعبه وهكذا ،

ننشىء من أزواج الفرد المتتالية مربعا ستة فى ستة ومن خواص هذا الجدول المربع أن آحاد أول كل سطر فى العرض كآحاد آخره ، وإن كان فى أحدهما صفر فى الآخر صفر ، ومنها أن مجموع طرفى كل قطر مساو لمجموع طرفى القطر الآخر مثل اثنين مع مائة واثنين وأربعين وهما طرفا قطر

٢٢	١٨	١٤	١٠	٦	٢
٤٦	٤٢	٣٨	٣٤	٣٠	٢٦
٧٠	٦٦	٦٢	٥٨	٥٤	٥٠
٩٤	٩٠	٨٦	٨٢	٧٨	٧٤
١١٨	١١٤	١١٠	١٠٦	١٠٢	٩٨
١٤٢	١٣٨	١٣٤	١٣٠	١٢٦	١٢٢

واثنين وعشرين مع مائة واثنين وعشرين وهما طرفا القطر الآخر ، ومنها أن مجموع طرفى القطر محذوران ، ومنها أن كل عددين بعدهما من طرفى القطر بعد واحد فمجموعهما مساو لمجموع طرفى القطر فهو كذلك . مجذور أيضا . ومن ذلك أن زيادة كل سطر على أول ذلك بالسطر واحدة فإن زيادة السبعين على ستة وأربعين كزيادة أربعة وتسعين على اثنين وعشرين .

وأما أحوال زوج الزوج والفرد فلتتكلم فيها فنقول إنه نسبة زوج الزوج والفرد فى أنه لا يقبل التنصيف المستمر إلى الواحد من غير كسر ونسبة زوج فى أنه لا ينتصف أول نصفه . إلى فردين ، ولا يقف تنصيفه على نسبة واحدة . وأما إنشاؤه فمن ضرب أزواج الزوج ومبدئه من الأربعة فى الأفراد المتتالية ، وكلما كان الزوج أكبر كان قبوله للتنصيف أكثر .

وقد يكون منه الزائد والناقص والتام فإن الثمانية والستين عدد ناقص وهو من جملته ، وأما التام فالثمانية والعشرون ، والزائد منه كثير مثل الاثنا عشر ، وقد يقع فيه المربعات أيضا . وإنشاء تلك المربعات التى تقع فيه أعدادها أن يضرب الأول حتى

في الفرد الأول حتى يكون ستة فهو جذر لأول مربع ، ثم نضربه في الفرد الثاني حتى تكون عشرة فهو جذر المربع الثاني ، وكذلك إذا نقصت البيت من الذي يليه خرج زوج الزوج مثل الاثنا عشر من العشرين ، وذلك فيما نشوه من ضرب الأربعة في الأفراد ، ومثل الأربعة والعشرين من الأربعين ، وذلك فيما نشوه من ضرب الثمانية في الأفراد ، وهذا ما نقوله في خواص أنواع الزوج .

- ولنتقل إلى خواص أنواع الفرد، وقد بقي علينا الكلام في أول الأعداد وهو الاثنان هل هو زوج الزوج أو زوج الفرد فقد ظن من جهة أنه لا يتهى التنصيف إلى زوج أنه زوج الفرد ، وجوز بعضهم أن يكون زوج الزوج وزوج الفرد معا وأن يكون مبدأ لكليهما ، والذي عندي أن زوج الزوج بالحقيقة هو العدد المنقسم إلى الزوج عند التنصيف ، وزوج الفرد بالحقيقة هو المنقسم إلى الفرد عند التنصيف . فزوج الزوج هو الذي نصفه زوج ، وكل نصفه ينصفه غير الواحد زوج ولا بد من تنصيف زوج الزوج : وزوج الفرد وهو الذي نصفه فرد لا ينتصف ، والفرد يكون عددا أو يكون وحدة من حيث لا ينقسم بمساويين ، والزوج لا يكون إلا عددا . وبعد ذلك فيجب الايشاح في التسمية فإن أحب أحد أن يجعل الاثنين مستحقا للاسمين جميعا فيجب أن يجعل حد زوج الزوج أنه الذي لا يتصف إلى عدد فرد وكذلك الاثنان ، ويجعل زوج الفرد هو الذي يتصف إلى الفرد وكذلك الاثنان لكن القسمة لا تكون متعادلة فإن أحب أن يخرج الاثنين عن الاسمين جميعا فيجب أن يجعل حد زوج الفرد أنه المنتصف إلى عدد فرد ، وحد زوج الزوج أنه المنتصف إلى عدد زوج فلم يكن الاثنان مستحقا لأحد الاسمين مع تعادل القسمة .

- فلنتكلم الآن في أحوال أنواع الفرد ، والفرد منه أول ومنه مركب ، والمركب قد يكون أولا بالقياس إلى غيره ، وقد عرفت جميع هذا . وإذا أردت أن تستخرج مراتب المركبات في أنفسها فارجع إلى جداول الأفراد المتوالية فتجد كل ثالث بعد الثلاثة مركبا وكذلك إلى غير النهاية ، مثال الأول التسعة والخمسة عشر والواحد والعشرون ، مثال الثاني الخمسة عشر والخمسة والعشرون والثلاثون وكذلك ، وقس له من السبعة والتسعة على ذلك ، وتجد هناك شيئا آخر وهو

(٣) الإثنا عشر من العشرين : الستة عشر (سا) وهو خطأ .

(٦) خواص : ساقطة في (سا) .

(٢٢) في أنفسها : غير موجودة في (ب) .

أن الثلاثة منها بعد أول مركب في ترتيبها بأول الأفراد وهو بنفسها كالسبعة ،  
والثاني بالفرد الذى يليها كالخمسة ، والثالث بالفرد الثالث كالسبعة ، والخمسة  
أيضا بعد الذى يليها بأول الأفراد وهو الثلاثة مثل خمسة عشر ، والثاني بنفسها  
كالخمسة والعشرين ، والثالث بما بعدها مثل الخمسة والثلاثين فإنها بعدها مثل  
الخمسة والثلاثين فإنها بعدها بالسبعة ، وأما المركب في نفسه والأول عند غيره  
فمثل كل مربع أول بالقياس إلى مربع أول من هذه الأفراد المتتالية .

فهذا ما نقوله في أحوال الزوج والفرد . وللعدد قسمة أخرى ، فمنه زائد  
ومنه ناقص ومنه تام وق . عرفت جميع ذلك وعرفت كيفية إنشاء العدد التام  
من أزواج الزوج . فاعلم أن العدد التام لا يكون إلا زوجا لأنه إنما يتشأ من  
ضرب عدد فرد في زوج ، واتفق أن الواقع منه في الآحاد واحد وهو الستة ،  
وفي العشرات واحد وهو الثمانية والعشرون ، وفي المئات واحد وهو أربعمائة  
وستة وتسعون ، وفي الألوف واحد وهو ثمانية آلاف ومائة وثمانية وعشرون ،  
وكذلك في كل صنف واحد . لا ينفك عن آحاد وهي ستة أو ثمانية وإن لم يلزم  
عند التجربة فيها التعاقب .

ومن خواص العدد التام أنه إذا ضرب في ثمانية زيد عليه واحد كان  
محدورا ، وإذا قسم جذره على أربعة وزيد على ما سيجتمع ربع كان زوج  
للزوج الذى ضرب في ضعفه إلا واحدا حتى خرج ذلك العدد التام مثل الستة  
في الثمانية مزيدا عليه واحد ، وجذره سبعة ، وربعه واحد وثلاثة أرباع ، فإذا  
زيد عليه ربع صار اثنين وهو زوج الزوج ، وهو الذى وقع الضرب في ضعفه  
إلا واحد حتى خرج ستة .

وأما العدد الزائد والناقص فقد يكون كما نوضحه في كل باب ، وفي خروج  
التام والناقص والزائد امتحان وقع لبعض الناس ، وهو أن كل زوج ضرب  
في عدد أول كيف كان ، بعد أن يكون زوج الزوج أكبر من نصف ذلك الأول  
بنصف ، فإن المجتمع منه أبداً عدد تام مثل الاثنين في الثلاثة والأربعة  
في السبعة ، فإن كان أكثر من نصفه بأكثر من نصف واحد فالمجتمع زائد ،  
وإن كان أقل من نصفه كيف كان فالعدد ناقص ، مثال الأول الأربعة في الخمسة ،  
ومثال الثاني الأربعة في التسعة وفي الأحد عشر ، وكل عدد من الأعداد التامة  
ضرب في عدد أول لا يعد ذلك العدد الأول ذلك العدد التام إذ حدث



عدد زائد على جميع أجزائه بضعف العدد التام مثل الستة إذا ضربت في سبعة فحدث اثنان وأربعون ، له من الأجزاء النصف وهو واحد وعشرون ، والثالث وهو أربعة عشر ، والسادس وهو سبعة ، والسبع وهو ستة ، والجزء من أربعة عشر وهو ثلاثة ، والجزء من أحد وعشرين وهو اثنان ، والجزء من اثنين وأربعين وهو واحد ، وجميع ذلك أربعة وخمسين وهو يزيد على اثنين وأربعين ٥ باثنا عشر وهو ضعف ستة .

وكل عدد لا يعده اثنان وأربعة فهو ناقص أبدا ، وجميع الأعداد الأولية ناقصة لا محالة ، وجميع أزواج الزوج ناقصة بواحد ، وكل عدد خلاف الستة بعده الاثنان والثلاثة فهو زائد أبدا ، وكل عدد بعده الاثنان وعددان يكون سمي مجموعهما قام مقام الثالث ، أى يكون أجزاءهما مثل الثالث ، ١٠ أى يكون التأليف من نسبي جزئيهما يوازى الزائد ثلثا ، فهو زائد أبدا مثل مجموع (٥) نسبي الزائد خمسا والزائد تسعا فإنه يوازى الزائد ثلثا فهو زائد أبدا مثل السبعين فإنه لما عده مع الاثنين والخمسة والسبعة كان زائدا . وكل زوج فرد تركيب كالثمانية عشرة والثلاثين فهو زائد أبدا ، فان كان مركبا من فرد أول فهو ناقص ، وقد يوجد في زوج الزوج والفرد زائد وناقص وتام مثال الزائد ١٥ أربعة وأربعين فهو زائد ومثال الناقص ستة وثلاثين ومثال التام ثمانية وعشرين ، والعدد الفرد لا يكون تاما كما علمت ولا يكون ناقصا ولا يكون زائدا إلا أن يكون مركبا من أربعة أفراد متتالية على النظام الطبيعي مثل ما أوله ثلاثة ثم خمسة ثم سبعة ثم تسعة ، مثل تسعمائة وخمسة وأربعون ودو أول عدد فرد زائد بالثلث (٦) فإن ترك هذا الولاء لم يلزم أن يكون زائدا ، فلنختتم ٢٠ ها هنا الكلام في هذا الفن من علم العدد ولننتقل إلى الفن الذى نعتبر فيه إضافة عدد إلى عدد .

تمت المقالة الأولى من الأرثماطيقى بحمد الله وحسن توفيقه .

(٣) الثالث وهو أربعة عشر : الثالث وهو أربعة عشر وهو ثلثه (سا) :

(٧) وهو ضعف ستة : وهو ضعف ثلاثة (د) .

(١٢) يوازى الزائد ثلثا : يوازى الزائد ثلثا (سا) .

(\*) مجموع : صوابها ضرب لأن  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

(١٩) يكون مركبا : يكون مربعا (سا) .

(٢١) بالثلث : ناله (سا) . (٠) الصواب عدد فرد زائد بثلاثين .



## المقالة الثانية

أحوال لعدد من حيث  
إضافته إلى غيره



## أحوال العدد من حيث إضافته إلى غيره

- قد ننظر في العدد نظرا من جهة ما هو معتبر بنفسه وفي الأحوال التي تلزمه ، لأنه عدد ولأنه نوع عدد ، وقد ينظر فيه من جهات أخرى منها من جهة كونه مضافا إلى عدد آخر . وذلك العدد الأخير إن كان آخريته بالعدد لا بالنوع أو الصنف كانت الإضافية إضافة المساواة والمعادلة ، لا إضافة الخلاف والتفاوت ، وإن كانت آخرته بالصنف أو النوع كانت الإضافية إضافة التفاوت ، وكل متفاوتين فأحدهما زائد والآخر ناقص . وإذا عرفت أحوال الزائد عند الناقص عرفت أحوال الناقص عند الزائد على ما توجبه المعادلة في الإضافة : والزائد إما بسيط أو غير بسيط ، والبسيط إما ضعف أو أضعاف ، وإما زائد بجزء أو أجزاء واضمم التثنية إلى الجمع ، والمركب ١٠ هو الزائد ، فذلك كله نسبة ، وإذا قلنا الأضعاف والأجزاء عينا ما هو أكثر من ضعف واحد أو جزء واحد وإن كان ضعفين أو جزئين . والناقص فقد جرت العادة بأن ندل عليه بأنه الذي يجب كذا ، مثل قولنا الذي يجب لزائد جزءا ، وربما اشتق له [
- اسم من اسم عدد الأضعاف ، مثل الثلث والرابع والجزء من اثني عشر ، وربما قيل بنسبتين كقولهم نصف السدس وخمس العشر فأول المضاعف الثاني وهو الذي الزيادة فيه بالمثل ١٥ وابتدأؤه في الأعداد من الواحد والاثنين ، وتزايد الناقص على ترتيب الأعداد المتوالية ، والزائد وهو الضعف على ترتيب الأزواج المتوالية تتفاضل اثنين اثنين ، ثم المضاعف الثلاثي وهو الذي الزيادة فيه بالمثلين ، وابتدأؤه من الثلاثة والواحد ، ويتزايد الناقص على ترتيب الأعداد المتوالية ، والزائد بثلاثة ثلاثة مثل ثلاثة وستة وتسعة واثني عشر ، وعلى ٢٠

---

(٨٤٧) وإن كانت آخريته بالصنف أو النوع كانت الإضافة : إضافة التفاوت : ساقطة في ب .

(٨) ويتزايد الناقص : اثني عشر (ب) .

هذا القياس يتزايد الناقص من جميع النسب الضعفية بواحد واحد و الزائد بعدة الأضعاف ويكون ابتداء الناقص من الواحد ، وابتداء الزائد من العدد المسمى بعدة الأضعاف ، وأول الزائد جزء هو الزائد على الآخر بمثل نصفه ، وابتدأؤه من الثلاثة والاثنيين . ويتزايد الناقص على ترتيب الأزواج المتتالية لما كان له نصف ، والزائد بثلاثة ثلاثة ، مثل الاثنيين مع الثلاثة ثم الأربعة مع الستة ثم التسعة وبعد الزائد نصف الزائد ثلثا ، وابتدأؤه من الأربعة والثلاثة ويتزايد الناقص بثلاثة ثلاثة وثلثة والستة والتسعة والزائد بأربعة أربعة ، وكذلك يستمر على هذا القانون . فإذا رسم لوح ذو جدول مربع يبتدئ من الواحد ، وتتزايد أول سطوره طولا وعرضا على ترتيب الأعداد الطبيعية ، وكذلك تبين في هذه النسب وأحكام أخرى خارجة عنها .

- ١٠ فليكن هذا اللوح المجدول عشرة في عشرة ، فتجد السطر الثاني على نسبة الضعف للسطر الأول ، والثالث على نسبة الثلاثة أضعاف ، وكذلك ، وتجدهم التفاضل على ما قبل ذلك ، وتجدهم السطر الثالث للثاني على نسبة الزائد جزءا ، وهو على نسبة الزائد نصفها ، والرابع للثالث على نسبة الزائد ثلثا ، والخامس للرابع على نسبة الزائد ربعا ، وكذلك على الإستمرار ، وتجدهم التفاضل على ما قبل لك ، وتجدهم زيادة السطر الثاني على السطر الأول يختلف بالعدد وإن لم يختلف بالنسبة ، فتجد زيادة البيت الأول منه على البيت الأول من السطر الأول بواحد ، وزيادة الثاني منه على البيت الثاني من السطر الأول باثنين . وكذلك على ترتيب الأعداد المتتالية ، وكذلك حال كل بيت عند المتقدم عليه . وتجدهم ذلك في المقايضة بين الثالث والأول في كل ترتيب على ترتيب الأزواج ، فتجد الأول من كل ثالث يزيد على الأول من كل أول باثنين ، والثاني بأربعة ، والثالث بستة ، وكذلك ، وأما زيادة البيت الأول من كل رابع على البيت الأول من كل أول فتلاثة ثلاثة ، وزيادة الثاني من الرابع على الثاني من الأول بستة ستة ، وكذلك زيادة كل بيت تزيد على زيادة البيت تحته بثلاثة ثلاثة ، وتجدهم زيادة الرابع (\*) على الثاني وبينهما سطر واحد كزيادة الثاني على الأول في النسبة . وزيادة السادس على الثالث وبينهما سطران كزيادة الرابع على الثاني في النسبة ،

(\*) في الأصل الثالث ، والرابع هو المراد .

١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
٢٠	١٨	١٦	١٤	١٢	١٠	٨	٦	٤	٢
٣٠	٢٧	٢٤	٢١	١٨	١٥	١٢	٩	٦	٣
٤٠	٣٦	٣٢	٢٨	٢٤	٢٠	١٦	١٢	٨	٤
٥٠	٤٥	٤٠	٣٥	٣٠	٢٥	٢٠	١٥	١٠	٥
٦٠	٥٤	٤٨	٤٢	٣٦	٣٠	٢٤	١٨	١٢	٦
٧٠	٦٣	٥٦	٤٩	٤٢	٣٥	٢٨	٢١	١٤	٧
٨٠	٧٢	٦٤	٥٦	٤٨	٤٠	٣٢	٢٤	١٦	٨
٩٠	٨١	٧٢	٦٣	٥٤	٤٥	٣٦	٢٧	١٨	٩
١٠٠	٩٠	٨٠	٧٠	٦٠	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠

١٠

وكذلك نجد كل عدد من أعداد القطر مربعاً مثل الأربعة والتسعة والستة عشر ، ونجد مجموع كل مربعين ومجموع المسطحين اللذين بينهما على التجويف مربعاً ، فمثل مجموع الأربعة مع التسعة ومع الستة والستة ، وذلك خمسة وعشرون ، ونجد مجموع كل مربعين متتاليين من مجموع المسطحين يزيد بواحد ، فيلزم أن يكون ضعف مجموع كل مربعين متقوصاً منه الواحد مربعاً . ونجد مضروب كل عدد من سطرين عدد من سطر آخر يكافئه ضرب النظير في النظير ، مثل الاثنين وهو الثاني من الأول في العشرين وهو الآخر من الثاني فهو مثل الأربعة الذي هو الثاني من الثاني في العشرة الذي هو الأخير من الأول . ونجد مضروب كل عدد من أعداد القطر في نظيره من الجانب الآخر من ذلك القطر ، مثل نظيره أحدهما في الآخر ، أعني من القطر الآخر ، مثل مضروب الواحد في مائة فهو مثل مضروب العشرة في العشرة ، ثم مضروب الأربعة في الأحد والثمانين مثل مضروب ثمانية عشر في ثمانية عشر ، وكذلك .

وأما الذنب الأخرى فلك أن تعتبرها من هذا الجدول فإننا نشير إلى كيفية التدبير في طلب أعدادها الأولى ، ونشير إلى أحوال تخصها ، ثم نشير إلى اعتبارها من هذا الجدول . فنقول أما نسب الزائد يميزين أو زائد بأجزاء فربما كان خالصاً وربما لم يكن خالصاً ، والخالص أعني به ما لا يرجع إلى نسبة

٢٥

(٢١) ثمانية عشر في ثمانية عشر : الثمانية عشر الثانية ساقطة في (د) .  
(٢٤) نسب الزائد يميزين : نسبة لزائد بجزء (ب) .

مثل وجزء رجوع الزائد بسدسين إلى الزائد ثلثا ، والزائد بربعين إلى الزائد نصفاً ، وكذلك كل زائد يجزئين سميها زوج ، ورجوع الزائد بثلاثة أسداس إلى النصف ، وأربعة أثمان إلى النصف ، وأيضا مثل الزائد بخمسين والزائد عليه بثلاثة أرباع . وليسر يوجد للخالص قانون مشترك فيه بل يحتاج كل باب إلى امتحان قانون جديد . وأما أن أجد مطلقا القانون في تحصيل عدده الأول أن يحصل أول سمي ذلك الجزء من الأعداد وأن ما يزيد عليه إن كان جزءين فاثنتين ، وإن كان ثلاثة أجزاء فثلاثة ، مثاله إن كانت الزيادة ثلثين وضعت ثلاثة وزدت عليه اثنين وكان خمسة فيكون إبتدأؤه من ثلاثة وخمسة ، وإن كانت الزيادة ثلاثة أرباع وضعت أربعة وزدت عليه ثلاثة فكان أربعة وسبعة وهو المبدأ ، فتجد الأعداد الناقصة في نسبة المثل وجزئين ، تتزايد بثلاثة ثلاثة والزائد بخمسة خمسة حتى يكون ثلاثة وخمسة ثم ستة وعشرة ثم تسعة وخمسة عشر ، وأما في نسبة مثل ربعين وهي غير خالصة فهي الناقصة تزايد بأربعة أربعة والزائدة ستة ستة على قياس أربعة وستة وثمانية [واثنى عشر ، وكذلك الناقص مثل نفسه والزائد مثل نفسه ، وعليه القانون في الزائد خمسين .

وأما مقايضة بعضها ببعض ، أعنى مقايضة الزائد ثلثين والزائد ربعين ثم الزائد خمسين فإن النواقص تتزايد بواحد واحد ، والزوائد أيضا تتزايد بواحد واحد ، فإن اعتبرت الخواص في هذه النسبة كانت على ترتيب الأفراد المتتالية مثل الخمسة للثلاثة وهو الزائد بثلثين والسبعة للخمسة وهو الزائد بخمسين والتسعة للسبعة وهو الزائد بسبعين . وأما المقايسات بين كثرة الأجزاء مثل الزائد بمثله وثلاثة أرباع ، فإن المتجانسة منها تتزايد نواقصها وزوائد على القياس المذكور ، وحتى تكون أربعة وسبعة ثم ثمانية وأربعة عشر ، وكذلك زيادة ثلاثة أخماس يكون خمسة وثمانية وعشرة وستة عشر ، ويكون مناسبات ما بينها على حسب ما قيل في الأول مثل أربعة وسبعة ثم خمسة وثمانية ثم ستة وتسعة . ويوجد للخالص قوانين غير مستمرة إلا في باب

(١) مثل وجزء : ساقطة في (ب) .

(٨) من ثلاثة : من اثنين (ب) .

(٩) وزدت عليه ثلاثة : ثلاثة ساقطة من (د) .

(١٥) وأما مقايضة بعضها عن البعض أعنى : ساقطة في (ب) .

(١٩) وأما المقايسات بين كثرة الأجزاء : وأما المقايسات كثيرة الأجزاء (ب) .

(٢٥) تتزايد : ساقطة في (د) .



يخرج بالامتحان ، فإذا أردت أن تجد أول عدد بنسبة المثل والجزء فتجد سمي الجزء من العدد مثل الاثنين للنصف والثلاثة للثلث ، وضعف ذلك العدد باثنين وزد عليه واحدا مثل الضعف والنصف . فان أنشأه من تضعيف الاثنين والزيادة عليه واحد فيكون اثنان وخمسة والضعف والثلث فإن أنشأته من تضعيف الثلاثة والزيادة عليه واحد فيكون ثلاثة وسبعة ومثل الضعف والربع فإن أنشأته من تضعيف الأربعة وزيادة واحد حتى يكون أربعة تسعة فتجد الأعداد في الأول تزايد الناقص باثنين اثنين على ترتيب الأزواج المتتالية ، ويتزايد الزائد بخمسة خمسة حتى يكون من الزائد نصفًا اثنين وخمسة ثم أربعة وعشرة ثم ستة وخمسة عشر ، وتجد الأعداد في الثاني وهو نسبة المثلين والثلث يتزايد الناقص فيها بثلاثة ثلاثة والزائد بسبعة سبعة مثل ثلاثة وسبعة ثم ستة وأربعة عشرون وأحد وعشرون ، وتجد الأعداد في الثالث يتزايد الناقص فيها بأربعة وأربعة والزائد بتسعة تسعة حتى يكون على توالي أربعة وتسعة ثم ثمانية وثمانى عشرة ثم اثني عشر وسبعة وعشرين ، وبالجملة فإن تزايد الناقص يكون على عدده الأول وتزايد الزائد على عدده الأول .

- وأما المناسبة فيما بين مراتبها ، أعني مناسبة ما بين الضعف والنصف وبين الضعف والثلث فان النواقص تزايد واحد بواحد والزوائد باثنين اثنين بحسب الضعفية حتى يكون اثنان وخمسة ثلاثة وسبعة وكذلك ، وتجري الزوائد على الأفراد المتتالية . وأما نسب الضعف والجزئين فيجب أن يعمل في إنشائه ما عملته إلا أن تزيد بدل الجزء جزئين ، فيبتدىء إما في نسبة الضعف والثلثين من الثلاثة والثمانية وفي نسبة الضعف والربعين وهي غير خالصة من الأربعة والعشرة ، وفي نسبة الضعف والخمسين من الخمسة والاثني عشر فتجد الزوائد أيضا تزايد باثنين اثنين والنواقص بواحد واحد . وتجد الاستمرار في باب واحد مثل ترتيب الأعداد الموضوعة لمثلين وثلثين ، فتجد النواقص والزوائد تزايد على أعدادها إلا أنك تجد عدد النواقص كما كان في مثل وثلث وضعف وثلث وعدد الزوائد ضعف ما كان فيهما ، وكذلك في ضعف وربعين وضعف وخمسين وسائر ذلك . وإذا جرت إلى الضعف والثلاثة أجزاء وأولها ثلاثة

(١٧) وتجري الزوائد على الأفراد المتتالية : ساقطة في (ب) - والجزئين : والمثلين (د) .

(٢١) الخمسة : السبعة في (ب) .

(٢٣) تزايد : ساقطة في (سا) ، (د) .

أربع فالإنشاء على ذلك السبيل بعينه ، لكنك تزيد للزائد ثلاثة أجزاء ثلاثة وللزائد أربعة أجزاء أربعة فأول الضعف والثلاثة الأجزاء الضعف والثلاثة أجزاء الضعف والثلاثة أجزاء الضعف من الأربعة والأحد عشر ، ثم الضعف والثلاثة أخماس وابتداؤه من الخمسة وابتداؤه من الخمسة والثلاث عشر ، ثم الضعف والثلاثة أسداس وابتداؤه من الستة وخمسة عشر ، وكذلك فتجد تزايد مراتب الأعداد كما كان ، فإن راعيت ما في باب واحد وجدت النواقص والزوائد أيضا تتزايد على مثل أنفسها ، لكن عدد النواقص يكون كما كان وعدد الزوائد عدد آخر ، فإن أردت النسبة ثلاثة أضعاف وجزءا أو جزئين أو أجزاء فعلت في إنشاء ذلك ما فعلته إلا أنك لا تضعف مرة واحدة فقط بل بعدد تلك الأضعاف ثم تفعل بالجزء والأجزاء ما فعلت ، وتجد أول ثلاثة أضعاف وثلاث من ثلاثة وعشرة ، وأول ثلاثة أضعاف وربيع من أربعة وثلاثة عشر ، فتجد النواقص تتزايد بواحد واحد والزوائد بثلاثة ثلاثة . فإن أخذت عرضا وجدت أول ثلاثة أضعاف ونصف من اثنين وسبعة ، وثانية من أربعة وأربعة عشر ، فتجد أيضا الزائد يتزايد بعدده والناقص يجري على تزايد الأزواج المتتالية ووجدت أول ثلاثة أضعاف وثلاث من الثلاثة والعشرة وثانية من الستة والعشرين فتجد الأصل محفوظا . فإن اعتبرت الثلاثة أضعاف والجزئين كان أول ثلاثة أضعاف وثلاثين من ثلاثة وأحد عشر ، وأول ثلاثة أضعاف وربيعين من أربعة وأربعة عشر ، وأول ثلاثة أضعاف وخمسين من خمسة وسبعة عشر ، فتجد التفاضل في النواقص على ولاء الأعداد الطبيعية والزوائد ثلاثة ثلاثة ، وإن أخذت عرضا وجدت أول ثلاثة أضعاف وثلاثين من ثلاثة وأحد عشر وثانية من ستة واثنين وعشرين وحفظت القانون . فإن اعتبرت الثلاثة أضعاف والثلاثة أجزاء كان أول ذلك ثلاثة أضعاف وثلاثة أرباع وأوله من أربعة وخمسة عشر ، ثم ثلاثة أضعاف وثلاثة أخماس وأوله من خمسة وثمانية عشر ، فتجد الأمر كذلك . وإن اعتبرت عرضا وجدت أول ثلاثة أضعاف وثلاثة أرباع من أربعة وخمسة عشر ، وثانية من

(١) ثلاثة أجزاء ثلاثة : أجزاء ثلاثة ساقطة في (ما) .

(٣) من الخمسة وابتداؤه من الخمسة والثلاث عشرة : ساقطة في (ما) ومكتوب بدلها مع الأربعة والأحد عشر .

(١٥) من ثلاثة وأحد عشر : من تسعة وأحد عشر (ما) ، (ب) .

(٢١) فتجد الأمر كذلك : ساقطة في (ب) .

ثمانية وثلاثين ، ووجدت ذلك القانون ، ولك أن تزيد في هذا وتغير أيضا مناسبة الحمل والحمل ، وسنخرجه لكن يقتصر على هذا ونذكر إشارات لوحية تسير بهذه .

فمن ذلك أنا إذا عملنا جدولا من سطرين أحدهما يتتالي فيه الأفراد المتتالية مبتدئة من خمسة ، ولنقف عند أحد وعشرين ، والثاني تتوالى فيه الأعداد مبتدئة من ثلاثة ، وتقف عند أحد عشر ، لاح لك فيها بين ذلك نسب فإذا اعتبرنا ما في كل بيت من الجدول .

٢١	١٩	١٧	١٥	١٣	١١	٩	٧	٥
١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣

الأول ، مضافا إلى نظيره من الآخر أدى أوائل الأعداد التي ابتدأت من المثل والثلاثين ، ثم المثل والثلاثة أرباع ، ثم المثل والأربعة الأخماس وكذلك ، فإن اعتبرنا تزايدها في البيت الأول كان على نسب مثل وجزئين الخالصة ، وإن اعتبرنا ترتيب ما في البيت الثاني ١٠ كان كذلك بنسب الزائد جزءا ، وإن وضعنا بدل البيت الثاني المبتدئ من ٣ بيتا آخر يبتدأ من اثنين ويجرى على ولاء الأعداد التي بالطبع كان نسبة البيت

٢١	١٩	١٧	١٥	١٣	١١	٩	٧	٥
١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢

١٥ الأول من السطر الأول إلى نظيره من السطر الثاني على نسبة مثلين ونصف ونسبة البيت الثاني من السطر الأول إلى نظيره من السطر الثاني في نسبة مثاين وثلاث ، وأدى أوائل أعداد جميع نسب المثل والجزء . ولك أن تستخرج من هذا جداول لسائر النسب الباقية ، على أن اللاح الأول يشير لك إلى جميع النسب فتخرج لك نسبة المثل والجزء

- ٢٠ (٢٠١) وتغير أيضا مناسبة الحمل والحمل وسنخرجه لكن يقتصر على هذا ، ونذكر إشارات لوحية تسير بهذه فمن ذلك : ساقطة في (ب) وفي د .  
 (١١) كان كذلك : المبتدئ من بيت آخر (ب) .  
 (١١) للزائد : غير موجودة في سا .  
 (١٦) أدب : ساقطة في (ب) .

مما علمت ، ونسبة المثل والجزئين من الجدول الخامس والثالث وهو للمثل والثلاثين ، ومن الجدول السادس والرابع وهو للمثل والربعين ، ومن الجدول السابع والخامس وهو للمثل والخمسين ، وكذلك . ويخرج من الجدول السابع والرابع بترك جدولين في البين نسبة المثل والثلاثة أرباع ؛ ومن الجدول الثامن والخامس بترك جدولين نسبة المثل والثلاثة أخماس ، وكذلك ويخرج لك من الجدول التاسع والخامس بترك ثلاثة جداول نسبة المثل والأربعة الأخماس ، ومن الجدول العاشر والسادس نسبة المثل والأربعة الأسداس ، وكذلك . ويخرج لك نسبة المثلين والجزء من ذلك اللوج أيضا ، أما أوله فنسبة المثلين والنصف بترك جدولين من الجداول الخامس والثاني ، وثانيه فنسبة المثلين والثالث فمن الجدول السابع والثالث يتخطى ثلاثة ، وثالثه نسبة المثلين والرابع من الجدول التاسع والرابع يتخطى أربعة ويخرج لك نسبة المثلين والجزئين ، أما الثالثان فمن الثامن والثالث ، والرابعان من العاشر والرابع ويخرج لك نسبة المثل وثلاثة أجزاء وسائر النسب إذا رعيت المذهب الذي أومأنا إليه .

وقد أشار القدماء إلى طريقة تنشأ من تساوى للنسب وتؤدي إلى النسب المختلفة من النسب المشار إليها ، فإنه أى أعداد متساوية رتب منها ثلاثة أمكن أن تنشأ النسب كلها منها بطريقة تستعمل فيها ، فليكن جدولا فيه ثلاثة أفراد ، ثم ثلاثة أعداد أخرى ، ثم ثلاثة أخرى ، وليكن بلائيات تكثر الاعتبار والتوسع في الامتحان ، ولعله من الغرض جداول أخرى على قسمته ، فنقول إنك إذا أخذت الأول فأثبتته في البيت الأول من كل جدول في العرض على أنه أول ، ثم جمعت الأول والثاني فرتبته في البيت الثاني من الجدول الثاني وكان جدول الوحدانيات اثنين ، ثم الجدول الأول والثالث وضعف الثاني ، فرتبهم في البيت الثالث منه فكان من جدول الوحدانيات أربعة ، ثم جعلت البيت الثاني أصلا وجمعت منه ذلك الجمع ونقلته إلى البيت الثالث ذلك النقل واستمر تدبيرك هذا في عدة أبيات ولكن أربعة في الطول عرض من ذلك أولا إن كان نسبة كل ثلاثة أعداد في صف واحد

(٧) المثل : مرتبة في (ب) - ثم المثل والأربعة الأخماس وكذلك : ساقطة في سا .

(٩) وثانية : وتسعة (سا) وهو خطأ .

(١٤) أمكن أن ينشأ : أن ينسب (سا) .

(١٥) أفراد : آحاد (ب) .

(١٧-١٨) فأثبتته في البيت الأول من كل جدول في العرض على أنه أول ثم جمعت الأول :

ساقطة في (سا) .

٤	٢	١
٨	٤	٢
١٢	٦	٣
١٦	٨	٤

١	١	١	١
٢	٢	٢	٢
٣	٣	٣	٣
٤	٤	٤	٤

- نسبة متصلة ، ونشأ منه من النسب المطلوبة أولا نسب الأضعاف ، فتجد ما في البيت الثاني على نسبة المثلين وما في البيت الثالث على نسبة الثلاثة أضعاف وما في البيت الرابع على نسبة الأربع أضعاف ، وليستمر ذلك إلى غير النهاية ، وعرض إن كان عدد ما في البيت الثاني على نسبة من السطر الثاني على نسبة الضعف مما في البيت الأول ، وعدد ما في البيت الثالث منه على نسبة الزائد نصفًا لما في البيت الثاني ، وما في البيت الرابع على نسبة الزائد ثلثًا لما في البيت الثالث وكذلك ، وما في البيت الثاني من السطر الثالث على نسبة أربعة أضعاف لما في البيت الأول ، وما في البيت الثالث على نسبة مثلين وربع لما في البيت الثاني ، وما في البيت الرابع على نسبة مثل وسبعة اتساع لما في البيت الثالث ، ولم يكن لهذا نظام : فإن أحببنا أن ندبر لتصور النسب الأخرى عرضًا تصورنا للنسب الأضعاف ، عكسنا السطر الثاني طولًا حتى وقع الثالث في الأول والأول في الثالث ، وبقي الوسط على حاله ، فإذا أخذنا نجتمع الجمع المذكور من هذا الموضع ، نأخذ الأول فنقله أولا في السطر الثالث فيكون أربعة . ثم نجتمع الأول والثاني ونقله إلى السطر الثالث فيكون ستة ، ثم نجتمع الأول وهو أربعة والثالث وهو واحد والضعف الثاني وهو أربعة ، ونقله إلى البيت الثالث فيكون تسعة وتتوالى أعداد السطر على نسبة الزائد نصفًا ، وقد تولد من نسبة الضعف وسميها جميعا ١٠ الاثنان . فإن عملت هذا العمل بالسطر العرضي الذي لنسبة ثلاثة الأضعاف ، أخرج لك أعدادا ثلاثة على نسبة الزائد ثلثًا ، فإن البيت سمي كليهما . وكذلك الحال في الجدول الرابع فإنه يخرج نسب الزائد ربعًا . فإن قلبت جدول وضع أعداد

(٩) لما في البيت الثالث : الثالث ساقطة في (د) .

الزائد نصفاً ، ثم فعلت به الفعل المذكور تولد لك من الزائد جزءا الزائد جزئين ، ومن الزائد ثلثا الزائد ثلاثة أجزاء وعلى هذا النسق فلان لم تقلب وضع أعداد الزائد نصفاً تولد نسبة الضعف والنصف ، ومن الزائد ثلثا نسبة الضعف والثلث . وإذا قلبت أعداد الزائد أجزاء ودبرت التدبير المعلوم ، وحفظته على حاله مرة أخرى ودبرت التدبير المعلوم خرج لك سائر النسب ، ولا تزال تخرج لك بعضها من بعض إلى غير النهاية حتى تشاهد نسق جميع ذلك من نسبة المساواة ، ولك

٦٤	٢٤	٩
٢٥	١٥	٩
٩	٦	٤
٤	٢	١
١	١	١

أن تعكس فتجد سائر النسب كلها يرجع إلى نسبة المساواة ، مثاله أنك إذا وضعت أعدادا ثلاثة على نسبة متوالية فحفظت الأصغر لحاله ثم حذفته من الأوسط وجعلت ما بقى حداً أوسط ، ثم ألقيت من الأكبر مثل الأصغر ومثل ضعف الباقي من الأوسط ، وجعلت الباقي حداً ثالثاً ، وجدت نسبة متصلة ، ثم تفعل بهذه الأعداد والحدود ذلك الفعل ، فتخرج لك نسبة أخرى ، وكذلك حتى تؤديك إلى نسبة المساواة ، مثاله لتكن الأعداد أولاً على نسبة مثلين وثلثين مثل تسعة وأربعة وعشرين وأربعة وستين فاحفظ تسعا ، وأسقطه من أربعة وعشرين ، واجعل ما يبقى وهو خمسة عشر حداً ثانياً ، فخذ ضعفه مع تسعة وأسقطهما من أربعة وستين يبقى لك خمسة وعشرين فاجعله ثالثاً ، يخرج لك أعداد متوالية على نسبة الزائد ثلاثين . ثم اصنع هذا الصنع بما عندك يخرج لك تسعة وستة وأربعة تخرج لك أعداد متوالية على نسب الزائد نصفاً ، ثم اصنع هذا الصنع بهذه الأعداد تخرج لك أربعة اثنان واحد ، وذلك على نسبة الضعف ، ثم إذا صنعت هذا الصنع خرج لك واحد وواحد ، وواحد وعاد إلى نسبة المساواة ، كذا الحال إن حللت نسبة الثلاثة

(١) تولد : ساقطة في (د) . الزائد أجزاء : الزائد جزءاً : ب .

(١٤) حداً أوسط : حد الأوسط (سا) - الباقي : الثاني (سا) .

(١٩) حداً ثانياً : جداً ثالثاً .

أضعاف والأربعة الأضعاف وسائر النسب التي لم نذكر تحليلاً لها بالعكس وعاد إلى نسبة المساواة من الطريق الذي منه ركبت .

- المنتقل الآن إلى تأليف نسبة في الأعداد من نسبتين ، ونقدم لذلك مقدمة جامعة تكفي  
 مؤونة امتحان الحال في نسبة وهو أن كل مثال جزئي يؤدي لتأليف نسبة في الأعداد  
 من نسبتين ، فقد وجدت النسب في ذلك الجزء على صفة مايلدك على كل نافذ في كل  
 أعداد تكون على تلك النسب ، لتكن أ ب مثلاً أربعة ولتكن أ ح اثنان  
 ولتكن أ د ثلاثة فيكون ل أ ب إلى أ د نسبة وهي نسبة الزائد ثلثا  
 وتكون ل د أ إلى ج أ نسبة وهي نسبة الزائد نصفاً ، ول أ ب إلى أ ح نسبة  
 وهي نسبة الضعف ، وهي مؤلفة لامحالة من هاتين النسبتين . فأقول إن كل نسبة  
 للزائد نصفاً تضاف إليها نسبة الزائد ثلثا فيكون المجتمع ما اجتماع هاهنا بعينه ، وإن  
 كل نسبة الزائد ثلثا تضاف إليها نسبة الزائد نصفاً يكون المجتمع ما اجتماع هاهنا وكل  
 نسبة الضعف ، فيحتمل أن يقسم بهاتين النسبتين وفصل إليهما ، وإلا فتكن ه ز : ه ح  
 نسبة الزائد نصفاً ، ونسبة ه ح : ه و نسبة الزائد ثلثا فأقول إن نسبة ه ز ه و نسبة  
 الضعف ، فلذلك تعلم أن بالتفضيل نسبة بد ز ح إلى د أ ه ز واحدة ، وبالتفضيل  
 نسبة و ا ه ز إلى ح د ز ج واحدة ، وبالمساواة نسبة بد ز ج مثل نسبة ه د ز ح ،  
 فتكون نسبة جميع ب ح إلى ج د وجميع ه ز إلى و ز واحدة ، ولكن نسبة أ ح  
 إلى أ د مثل نسبة ه ح إلى ه ز ، فبالتفضيل تكون نسبة د ج و ا مثل ح ز ز ه ،  
 وبالمساواة نسبة ب ح : ح أ كنسبة و ز ، وه ، وبالتركيب نسبة أ ب أ ج هي نسبة  
 ه ز ه و . وكذلك إذا كان الموضوع النسبة المركبة ، فإنه إذا كان في هذا الجزء بالنسب  
 كما كان ، ثم أوردنا أي عدد من كان ، ولتكن ه ز ه و وكان على نسبة الضعف ،  
 فنقول إن نسبة الزائد نصفاً على ه ز يقع بين ز و و ، وإلا فليقع خارجاً مثل ز ط .  
 فإذا أضفنا إليهما النسبة الأخرى مثل ط ي عادت النسبة المركبة الأولى ، فكان حينئذ

(٧) الزائد ثلثا : الزائد ثلاثاً (سا) .

(٨) و ل ا ب إلى ا ج نسبة : ساقطة في (سا) .

(١٤) نسبة ه ز ه و : نسبة ه ز ه ح (ب) - ز ح : و ح - (د) .

(١٥) و ا ه ز : و ا ز (ب) - و و ز ح : و و : و ح (سا) .

(١٦) ه و ، ز ح : و ح ح و (ب) - ح إلى ح و : ح إلى و ح (ب) .

(١٧) و ا إلى ا ح مثل ه ح إلى ه ز : و و ح - ا مثل نسبة ح و و - (ب) .

(١٨) كنسبة : ساقطة من (د) .

(١٩) ه ز ه و : ه و ز ح (ب) .

نسبة طى ه ز مثل نسبة ه وه ز ، على ما رقبنا، وكان ماهو أعظم من ه ومثل ه ز ،  
 فإذا يقع داخلا مثل ج ، فنقول إن نسبة ه وه ج هي النسبة الأخرى وإلا فلتقع  
 ل ه ح مع ه ط أو مع ه ك وفرض المحال المذكور. ولا تحسب أنا آوردنا برهانا جزئيا  
 لذكرنا نسبتي النصف والثالث ونسبة الضعف، بل نجب أن تعلم أن هذا برهان كلي ،  
 وإنما هو سبيلنا للتفهم.. وإلا فلك أن تقول إن عددى أب أ ج عددان جزريان وبينهما  
 نسبة ما وقد ألفت في هذا المثال من نسبتي أب أ د ، أ د أ ج أى نسبة كانت بأن  
 وقع عدد بينهما أنقص من أحدهما وأزيد من الآخر ، ثم يأتى البرهان على الوجه  
 الكلى من غير إشارة إلى تعيين النسبة. فهذا البيان يكفى مؤونة التكلف في إقامة  
 البرهان على تأليف نسبة من نسبتي الأعداد، وإذا وجدنا الأمثلة نخرج ذينك  
 النسبتين في تعليمنا الموسيقى بعد هذا الفن ، لكننا نتكلف بيانات خاصة لنسب ماهي  
 كالرؤوس لسائر النسب ، من ذلك أما نقول إن نسبة الضعف ونسبة الزائد نصفا  
 يتألف عنها نسبة الثلاثة الأمثال، فلتكن أ ح ضعف أب، ولتكن أ د مثل ونصف أ ج،  
 أقول إن أ د ثلاثة أمثال أب، برهان ذلك أن أ ح ضعف أب ف ب ح مثل أب ،  
 فهو نصف أ ح لكن ح د نصف أ ح ف أب ، ب ح ، ح د يساوى بعضها بعضا ،  
 فيكون جميع أ د ثلاثة أمثال أب ، فإن كان ح د ثلث أ ح ف أ د ضعف وثلث أب ،  
 فلتقسم أ ح أثلاثا على ه ، ز فيكون أ ه مثل ج د وهو ثلث أ ح الذى هو ضعف أب،  
 فنصف أ ه ثلث أب ف أ ه ثلثا أب ف أ د مثل ضعف أب أعنى أ ح ومثل ثلثه أعنى  
 ج د ، فإن كان نسبة أ ج أب نسبة الزائد نصفا ونسبة أ د أ ج نسبة الزائد ثلثا فنسبة أ د  
 أب الضعف ، لتقسم أب نصفين على ه فيكون أ ه ب ح د أ ه مثل ب ، ح ويكون  
 أقسام أ ه ب ح متساوية وهى ثلاثة و د ج مثل أ ح ثلاثة أقسام أ ج فالأقسام  
 الأربعة متساوية فجملة ب د مثل جملة أب وزيادة أ ح على أب بالمثل ، فإن كانت  
 نسبة أ ح أب نسبة الزائد ثلثا ونسبة أ د ا ح نسبة الزائد ثلثا ، فإن نسبة ا د ا ب نسبة  
 الزائد نصفا .

فلتقسم ا ب أثلاثا على ز ، ه فيكون أقسام ا ز ه ب ب ج متساوية وهى  
 أربعة ، ونصف كل واحد منها هو ثمن ا ج وهو مساو ل ح د ليكون ب د ثلاثة  
 أمثال ح د : ا ب ستة أمثال ح د ويكون ب د : د ح ، وهو نسبة مثل ونصف ونسبة

(٩) في الأعداد وإذا وجدنا الأمثلة نخرج ذينك النسبتين : ساقطة في (سا) .  
 (١١) الزائد نصفا : الزائد جزءا (ب) .



- بد د ح هي نسبة ا ب ب ح ، فإذا بدأنا كانت نسبة بد ا ب نسبة د ج ج ب ، فبالتركيب  
 ا د ا ب هي نسبة ب د ب ح وذلك نسبة المثل والنصف ، فان كانت نسبة ا ح ا ب  
 نسبة مثل وربيع ، ونسبة ا د ا ج نسبة مثل وخمسة فلان نسبة ا د ا ب نسبة مثل ونصف ،  
 وذلك لأن ا ب إذا انقسم أرباعاً كان كل قسم مثل ب ج وكانت أقساماً  
 خمسة متساوية ويكون ب د مثل نصف ا ب فإن كانت نسبة ا ح ا ب نسبة مثل  
 وخمسة ، ونسبة ا د ا ح نسبة مثل وسدس ، فلان نسبة ا د ا ب نسبة مثل وخمسين .  
 ونبين كل ذلك بأن نقسم ا ب أضعافاً ونعمل ما عملنا ، ونبين لك من هذا أن النسبة  
 المؤلفّة من مثل وسدس ومثل وسبع هي نسبة مثل وثلاث ، والمؤلفّة من مثل وسبع  
 ومثل وثمان هي نسبة مثل وسبعين ، والمؤلفّة من مثل وثمان ومثل وتسع نسبة مثل  
 وربيع ، والمؤلفّة من نسبة مثل وتسع ومثل وعشر نسبة مثل وتسعين ، والمؤلفّة من  
 نسبة مثل وعشر ومثل وجزء من أحد عشر نسبته مثل وخمسة ، والمؤلفّة من نسبة  
 مثل وجزء من أربعة عشر ومثل وجزء من خمسة عشر نسبة مثل وسبع ، وكذلك  
 على الولاء . وإذا كان ا ح ا ب على نسبة مثل وجزء من خمسة عشر و ا د ا ح على  
 نسبة الزائد ربعا ، فإن نسبة ا د ا ب مثل وثلاث ، ذلك لأنك إذا قسمت ا ب خمسة عشر  
 قسماً كان جميع ا ح ستة عشر قسماً و ح د ربع ذلك ، فهو أربعة أقسام ، فجميع ب د  
 خمسة أقسام و ا ب خمسة عشر قسماً وجميع ا د عشرون قسماً ، وف ب د ثلاث  
 ا ب ، ومثل هذا التدبير يبين أنه إذا كان ا ح ا ب على نسبة الزائد تسعاً و ا د ا ج  
 على نسبة الزائد خمسا ، كان نسبة ا د ا ب على نسبة الزائد ثلاثاً وأنت يمكنك  
 إذا سلكت هذه السبيل أن تبرهن على سائر ما في الموسيقى من التأليف على أن البيان  
 المقدم يكفيك تكلف المؤونة في ذلك كله .

تمت المقالة الثانية من الأرتماطيق والحمد لله رب العالمين

وصلى الله على محمد

( ١ ) فبالتركيب إذا ب هي نسبة ب د ب ح : ساقطة في ( ب ) .

( ٨ ) مثل وسدس : مثل وثلاث ( سا ) ، ( ب ) .

( ١٤ ) الزائد ربعا : الزائد جزءان ( ب ) .

( ١٨ ) إذا ب : إذا ب ( ب ) .

( ١٩ ) سائر : نهان ( ب ) .



## المقالة الثالثة

أحوال العدد من حيث كيفية  
تأليفه من الواح انبساط



## (أحوال العدد من حيث كيفية تأليفه من الوحدات)

قد أشرنا لك إلى أحوال العدد من حيث كميته في نفسه ، وأشرنا لك إلى أحوال من أحوال العدد من حيث إضافته إلى غيره ، ونحن نشير لك إلى أحوال العدد من حيث له كيفية تأليف من الوحدات لمشايتها الأشكال المقدارية .

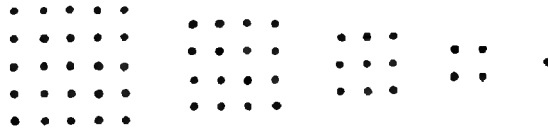
- قد شبهت هيئات الأعداد في تأليفها بالمقادير ، فقليل أعداد خطوية وأعداد سطحية ومسطحة وأعداد جسمية ومجسمة . فالأعداد الخطوية هي التي تتبدئ من الواحد وتستمر على نهجها ، وأول عدد خطي هو الاثنان ثم الثلاثة . وكذا . وأما المسطحة فهي التي يمكن أن يؤلف بعضها إلى بعض تأليفا يحاكي بعض السطوح المشكلة والمجسمة ، فهي التي يمكن أن يؤلف بعضها إلى بعض تأليفا يحاكي بعض المقادير المجسمة ، وأول المسطحة هي الأعداد الثلاثة ، وهي الأعداد ١٠ التي إذا نظمت أحدهما نظما ما ، حاكت شكلا تحيط به ثلاثة أضلاع ، وأولها ثلاثة وصورتها .: هـ هكذا ، ثم الستة وصورتها تحدث من إضافة خط عددي أزيد بواحد من الخط العددي الذي هو كما رأيته أضيف إلى الواحد ، فتولد المثلث الأول وهو الاثنان فيكون ثلاثة . ونكون الصورة هكذا .: .
- وكذلك كلما أضفت إلى ذلك خطا عددا ما على نظام الأعداد المتتالية ، حدث ١٠ مثلث أكبر ، مثل إنك إذا أضفت إلى ذلك خطا عدديا من أربع وحدات كان شكل مثلث آخر على هذه الصورة .: . فأول المثلثات ثلاثة وضمعه اثنان ، والمثلث الثاني ستة وضمعه ثلاثة ، والمثلث الثالث عشرة وضمعه أربعة ، والمثلث الرابع خمسة عشر وضمعه خمسة . وكل مثلث يزد على الذي يليه تحته بضلع

(١٣) ثم الستة ..... وتكون الصورة هكذا : ساقطة في (ب) .

(١٤) كلما أضفت : كلما زيد (ما) .

نفسه ، وتتفاوت أضلاعها على ترتيب الأعداد المتتالية من الواحد مع الواحد ، فأى عدد اجتمع لك من ذلك فهو مثلث ، وكل مثلث ضلعه يزيد على مرتبته بواحد . فإن قيل لك ما ضلع المثلث العاشر من أول الأعداد المثلثة ، فقل أحد عشر ؛ فإن أخذت الواحد فى جملة المثلثات كان عدد الضلع وعدد المرتبة واحدا ، ولكن الواحد وإن كان لك أن تقول إنه مربع أو مكعب بالقوة ، فليس مثلثا ولا خمسا ولا شيئا من ذلك ، لا بالقوة ولا بالفعل ، إلا باشتراك الاسم ، ولا تلتفت إلى ما يقولون ، وكل مثلث فإنه نصف مضروب مرتبته فى الأزيد منه بواحد حتى لو قيل لك ما عدد المثلث الخامس أخذت خمسة وضربته فى أزيد منه بواحد ، فكان ثلاثين فأخذت نصفه وهو خمسة عشر وهو المثلث الخامس .

١٠ وكل ضلع مثلث فهو أقل عددين متتالين بضرب أحدهما فى الآخر ، فيكون منه ضعف مثلثه ، حتى لو قيل ما ضلع خمسة عشر من المثلثات ، فلإنا نضعفه فيكون ثلاثين ، فيطلب عددين متتالين مسطحهما ثلاثون فنجد خمسة وستة ، فنقول إن ضلعه خمسة . وبعد الأعداد المثلثة الأعداد المربعة ، وهى التى عرفتها ، فهى تحدث من خطوط عددية منساوية ، عددها عدد ما فى الواحد من الآحاد ، وضلوعها على ترتيب الأعداد مبتدئة من الواحد ، مثل الواحد فإنه مربع الواحد والأربعة فإنه مربع الاثنين والتسعة فإنه مربع الثلاثة والستة عشر فإنه مربع الأربعة والخمسة والعشرون مربع



الخمسة على هذه الصورة وإنشاؤها من جميع الأفراد المتوالية مع الواحد ، مثل الثلاثة والواحد فهو أربعة وهو أول عدد مربع ، ثم الواحد والثلاثة والخمسة وهو تسعة وهو العدد المربع الثانى ، ثم الواحد والثلاثة والخمسة والسبعة وهو ستة عشر وهو العدد المربع الثالث ، ثم الواحد والثلاثة والخمسة والسبعة والتسعة وذلك خمسة وعشرون وهو العدد المربع الرابع .

(١٠) وكل ضلع : وكل ضعف (سا) .

(١٥) فإنه مربع الواحد . والأربعة فإنه : ساقطة فى (سا) .

(١٩) ثم الواحد والثلاثة والخمسة وهو تسعة وهو العدد المربع الثانى : ساقطة فى (سا) ، (ب) .

(٢١) المربع الثالث : المربع الثانى (سا) .

ومن خواص المربعات أنك إذا جمعتها من مربع الواحد كان مجموعها أكبر من مربع الأخير بما قبلها من المربعات ، مثاله أن مجموع مربعي الواحد والاثنين يزيد على مربع الاثنين بمربع الواحد ، ومربع الواحد والاثنين والثلاثة يزيد على مربع الثلاثة بمجموع مربعي الواحد والاثنين ، وكذلك مع الواحد والاثنين والثلاثة والأربعة يزيد على مربع الأربعة . لمجموع مربعات الواحد والاثنين والثلاثة .

- وقد استخدموا لإنشاء المربعات طريقا يسمونه المرقص ، وهو أنك إذا ابتدأت من الواحد، فجمعت ما شئت من المراتب ثم عطفت فنزلت جامعا، فما كان مجموع ذلك فهو مربع ، مثل أن تصعد من الواحد إلى الاثنين فيكون ثلاثة ، ثم تجمع إلى الواحد فيكون أربعة وهي مربع أول ، ثم إن جمعت الواحد والاثنين والثلاثة، فأضفت إليه الاثنين ثم الواحد كان تسعة وهو مربع ثان ، فإن صعدت من الواحد والاثنين والثلاثة والأربعة جامعا ، ثم نزلت فجمعت الثلاثة والاثنين والواحد كان جميع ذلك ستة عشر ، وهو المربع الثالث من المربعات العددية . ونحصل هذه الطريقة أن مجموع كل أعداد متوالية مع مجموع ما ينقص منه بالمرتبة الأخيرة ، فهو مربع أيضا ضعف مجموع كل أعداد متوالية إلا العدد الأخير فهو مربع ، وكل مثلثين متوالين يجمعان من الواحد والثلاثة والثلاثة والستة فهو مربع ، وهذا أيضا لإنشاء المربعات ، فيكون كل مربع من ماث في درجته ومثلث أنقص من درجته بواحد . وكل مربعين يضرب ضلع أحدهما في الآخر بضعف ويجمع إلى المربعين ، فالجميع مربع ، مثل مضروب اثنين في ثلاثة إذا جمع ضعفه مع أربعة وتسعة فكان خمسة وعشرين . وكل مربع يزداد عليه جزآن متباعدان كان وإلى مثله ومثل ربه أو ثلاثة أمثاله ، أو نقص منه ثلاثة أرباعه ، فما يحصل فهو مربع ، ولا مربع نصفه أو ضعفه مربع ، ولا تجمع المربعات المتتالية مبتدئة من الواحد مربعا ألبة ، وكل مربع فلما أن يكون له ثلث صحيح : واعلم أن آحاد العدد المجذور لا تخلو إما أن يكون واحدا أو أربعة أو خمسة

(٣) بمربع الواحد : بواحد (ب) .

(٦) وقد استخدموا : وقد استخرجوا (د) .

(٧) فنزلت : فتركت (سا) .

(٩) مربع أول : مربع أقل (سا) .

(١٨) مثل : مثل عدد (سا) .

(١٩) ساعدان : ساعدان (سا) — متباعدان (ب) .

أو ستة أو تسعة ، فإن كان واحدا فأحاده ضلعه إما تسعة وإما واحد ، وإن كان أربعة  
فثمانية أو اثنان ، وإن كان خمسة فخمسة ، وإن كان ستة فسته أو أربعة ،  
وإن كان تسعة فثلاثة أو سبعة . وامتحان المربعات في الطريق الهندى فلا يخلو إما أن  
يكون واحدا أو أربعة أو سبعة أو تسعة ، فللواحد واحد أو ثمانية ، وللأربعة  
اثنان أو سبعة ، وللسبعة أربعة أو خمسة ، وإن كان تسعة فثلاثة أو ستة أو تسعة .

ويتلو المربعات في الأعداد الأعداد الخمسة ، وأولها الخمسة فإنها تؤلف على هذه  
الصورة : : وهو أول الخمسات وضلعه اثنان ، والخمسة الثانى وهو الذى ضلعه العدد

الثانى وهو ثلاثة ، ويكون الخمس المجتمع منه اثنى عشر على هذه الصورة : : : .  
والعدد الثالث وهو أربعة والخمى المجتمع منه هو الاثنان والعشرون ، والرابع وهو خمسة  
والخمى المجتمع منه خمسة وثلاثون ، والخامس أحد وخمسون ، والسادس سبعون .

وترتيب أضلاعها على ترتيب الأعداد المتوالية ، وإنشاؤها من جميع الأعداد المتفاضلة ،  
ثلاثة ثلاثة ، مبتداً من الواحد مثل أعداد ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩ . فالواحد مع

الأربعة خمسة وهو أول خمس ، والواحد مع الأربعة والسبعة اثنى عشر وهو الخمس  
الثانى ، والواحد مع الأربعة والسبعة والعشرة اثنان وعشرون وذلك هو الخمس

الثالث . وقد تنشأ من جميع المربعات كل مع المثلث الذى دونه فى المرتبة مثل المربع  
الثانى مع المثلث الأول . فيكون اثنى عشر ، ولكل واحد منها خاصية مثل الخاصية

الأخيرة المذكورة للمخمسات . لكن المسلس يدل على نصف ضلع ضلع والزيادة  
بتضعيف ضلع ضلع . وللمسبع يدل ذلك ضلع ونصف وعليه تجرى الزيادة ، وفى

المثلث يدل ذلك ضلعان ضلعان . وقد تؤلف هذه كلها من المثلثات ، فكما أن المربع  
يتركب من مثلثين ، وكذلك الخمس من ثلاث ، والمسدس من أربع ، والمسبع من

خمس ، على نسق يشابه نسق تأليف المربعات ، فيكون مثلاً الخمس الثانى من مثلثين ،  
كل المثلث الأول مرتين ، والثالث المثلث الثانى ، والخمى الثالث من الثانى مرتين والمثلث

الثالث ، وكل مسدس مثلث ولا ينعكس . وكل مثلث عدده زوج فلا شركة بينه وبين  
المسدس ، وإذا أردت أن تجده المثلث من المسدس فتحذف الواحد من ضعف عد

(٩) اثنا عشر (د) ، ٢ وهو خطأ .

(٩) : : : : : فى سا والظاهر أن الصواب : : : : :

(١٠) وهو خمسة ..... سبعون : ساقطة فى (د) وبدلها والخمى والخامس والسبعون .

(٢٣) مرتين الأول ساقطة — والمثلث الثالث ساقطة .



المسدس ، وعكسه أن يزداد واحد على عدد المثلث ويؤخذ نصفه ، وكل عدد خمس فإنه ونصف مايجتمع من ضرب عدد أنقص من مرتبته واحد في التفاضل بين الأعداد التي تنشأ منه ، وهو ثلاثة مزيدا عليه ما بين عددين من ذلك وهو اثنان ، مضروبا في عدد مرتبته من الخمسات العددية ، مثاله إذا أردت أن تعلم الخمس الرابع ضربت ثلاثة وكان تسعة ، وزدت عليه اثنين فكان أحد عشر ضربته في أربعة وكان أربعة وأربعين . أخذت نصفه فكان اثنين وعشرين هو الخمس الرابع ، وأيضا فإن كل خمس فإنه مثل مضروب عدد مرتبته محسوبا من الواحد في نفسه مزيدا عليه نصف ضلعه بمرار في الخمسات العددية ، مثاله في المسألة المذكورة بضرب أربعة في أربعة لأنه في المرتبة الرابعة من الواحد فيكون ستة عشر ، وتزيد عليه نصف ضلعه وهو اثنان ثلاث مرات فيكون اثنين وعشرين .

١٠

وبعد الخمسات المسدسات ، وتألف من جميع الأعداد المتفاضلة بأربعة أربعة على قياس ما قيل في الخمسات ، ثم السبعات وتألف من جمع الأعداد المتفاضلة بخمسة خمسة ، ثم الثمناات وتألف من جميع الأعداد المتفاضلة بستة ستة . ونقول إن كل سطح بعد المربع إذا جمع مع المثلث حدث السطح الذي يلي ذلك السطح في عدد الضلوع ، مثل المثلث الأول وهو ثلاثة إذا جمع مع المربع الثاني كان خمسا ، وإن جمع مع الخمس الثاني وهو اثني عشر كان مسدسا وهو الخمسة عشر ، وعلى هذا الترتيب : وفضل كل مسطح على الذي قبله مثلث ، وقد اتفق ولا ينعكس . وكل عدد تام فهو مسدس أو مثلث ، وسيكون من هذا سبيل يتوصل به إلى استخراج ترتيب الأعداد التامة أيضا ، فإذا قيل لك العدد التام الأول من أى المسدسات أو المثلثات هو ، فانظر إلى القانون الذي عرفته في هذا الوجه خاصة فتجد أول زوج يعتبر فيه القانون المعلوم هو أربعة ، فيستخرج على ما علمت وتنصف أربعة فيكون اثنين فقل هو المسدس الثاني ، ويلى الأربعة ثمانية وتجد السبعة كذا أولا فيصلح لمطلوبك فينصف الثمانية فيكون أربعة فقل هو المسدس الرابع والمثلث السابع ، يلى الثمانية ستة عشر فإن نقصت منه واحدا بقى مركب فلا يصلح لعملك ويلى الستة عشر اثنين وثلاثين فإن نقصت منه واحدا بقى عدد أول فيصلح لعملك فخذ نصفه وهو ستة عشر فقل المسدس السادس عشر والمثلث الحادى والثلاثون وعلى هذا القياس .

٢٠

ولنتكلم الآن في الأعداد المجسمة فأولها المخروطات وتعرف بالنارية ، وهي التي  
تبتدى من قاعدة متسعة ثم لايزال ينمو حتى يبلغ طرفا حادا تحده الوحدة ، فأولها التي  
قاعدته مثلثة وأول ذلك الأربعة فهي أول عدد ، وهو خطى وسطحي ومجسم ويتألف  
من تأليفات المثلثات على تواليها تركيبا للأقص منها على الأزيد حتى ينتهى إلى الواحد ،  
ثم التي قاعدتها أربعة ويتولد من تأليف المربعات على تلك الصفة وكذلك التي قاعدتها  
خمسة والتي قاعدتها مسدسة ، وكل عدد مسطح مركب منه يسمى قطعاً ، والذي نقص  
من جانبه الأول سمي كرسيا وإنشاؤه ، وأما الذي قاعدته مثلث فان يضاف إلى الوحدة  
المثلث الأول ويكون أربعة فهو المخروط الأول ، ثم المثلث الثاني فيكون عشرة وهو  
المخروط الثاني من هذا القبيل . وأما الذي قاعدته مربع فأوله من الواحد والمربع الأول ،  
وثانيه من الواحد والمربع الثاني ، والذي قاعدته خمسم ومسدس وغير ذلك فعلى ذلك  
القياس .

وأما أمر الزوايا والأضلاع وعادها ، فعلى قياس الأشكال العظيمة والمنشور ، وأيضا  
من الأشكال العادية المجسمة وهي من تضعيف المثلثات وإلصاق بعضها ببعض ،  
فالستة أول منشور نشأ من المثلث الأول له ثلاثة أضلاع كل ضلع ذو أربعة ،  
وضلعان كل ضلع مثلث ، لكن الأضلاع في أعدادها . وأما الأشكال المجسمة  
تحيط بها ستة سطوح فلا يخلو إما أن يكون طواها وعرضها وعمقها متساوية ،  
فيكون مثل عشرة في عشرة ثم في عشرة ويسمى مكعبا ، وإما أن يكون قطران  
منها متساويان وقطر مخالف وإذا كان القطر المخالف أصغر سمي لبنيا ، وإذا كان  
أكبر سمي عموديا ، وإن كان مسطوحه الأصغر دائرا سمي مستديرا مثل خمسة  
في خمسة ثم في أكثر من خمسة . وإما إن كانت الثلاثة مختلفة فيسمى  
أجنبيا وزنبوريا ومحصرا ، لأنه يأخذ من غلظ إلى دقة ، وربما سموه الشكل  
المنبجي إذ كانت ملابجهم تبنى على تلك الصورة . مثال اللبني أربعة في أربعة  
ثم في ثلاثة ، مثال العمودي أربعة في أربعة ثم في خمسة ، مثال الأجنبي ثلاثة  
في أربعة ثم في خمسة أو في ثمانية ، ومن عادتهم أن يسموا العدد الذي يرجع

(٣) بتأليف : يتولد (د) .

(٤) تركيباً : ساقطة (سا) .

(٦) وكل عدد مسطح : كل عدد مسدس (سا) .

(١٧) مثل عشرة في عشرة : في عشرة ساقطة في (د) .

إذا ضرب في نفسه ثم ما اجتمع في نفسه وكذلك « عددًا دائرًا » مثل الخمسة والستة ، فإن الخمسة في نفسها خمسة وعشرون ثم في خمسة مائة وخمسة وعشرون ، والستة في نفسها ستة وثلاثون ثم في ستة مائتان وستة عشر ومن الناس من يسمى مسطحه دائرة ودوريا ، ومكعبة كرة وكريا ، والذي ينبغي أن يبحث عن حاله المكعب ، وقد علم منها جملة من كتاب الأصول .

- ومن خواص المكعب أن كعب كل عدد إذا ضرب في الذي يتلوه ثم في الذي قبله ثم زيد الذي قبله على ما اجتمع كان مساويا له ، فأما إنشأه فإن ترتب الأفراد المتوالية مبتدئة من الواحد ثم تجمع على حسب المرتبة ، فيتولد المكعبات على تواليها ، مثاله لترتيب واحد ثلاثة خمسة سبعة فتسعة أحد عشر ثلاثة عشر ، فالواحد مكعب ، وبعده الثلاثة وهو في المرتبة الثانية ، فيجب أن يجمع مرتين ، فيجمع الثاني والخمسة وذلك ثمانية ويكون مكعبا ، وبعده السبعة وهو في المرتبة الرابعة ، فيجب أن يجمع ثلاث مرات فيكون سبعة تسعة أحد عشر فذلك سبعة وعشرون وهو المكعب الثاني . وعلى هذا النهج فإن أردت أن تعرف أول فرد تركب منه المكعب المعلوم ، فخذ عدد مرتبة المكعب فإن كان الثالث فالعدد ثلاثة فاضربه في نفسه ، ثم خذ مرتبة المكعب فإن كان الثالث فالعدد من أول عدد المكعب فيكون ذلك أنقص من الأول بواحد ، ويكون مثال هذين في المكعب الثالث ، أما الأول فثلاثة وأما الثاني فاثنتان فانقص الثاني من مربع الأول كما نقص هاتين اثنتان من تسعة ، فهو أول فرد منه تأليف المكعب الثالث وذلك هو سبعة ثم زدته عليها فيكون أحد عشرة وهو آخر فرد منه تركيبه فركب منهما ومما بينهما . والأربعة والخمسة والستة والتسعة تعود في مكعباتها دائما آحادا فيكون ذلك دليلا على ٢٠ آحاد المكعب ، مثل أربعة في أربعة ثم في أربعة فيكون أربعة وستين ، والتسعة في التسعة ثم في التسعة ، وهو سبعائة وتسعة وعشرون ، أما كعب الاثنين فهو في الثمانية دائما ، وكعب الثانية فهو من الاثنين دائما ، وكعب السبعة في الثلاثة وكعب الثلاثة في السبعة دائما ، ومضروب الكعب في الكعب ومقسومه عليه مكعب ، وضرب مربع عددين في مربع عدد آخر نسبتها نسبة كعبين لمكعب ، والتفاوت بين المكعبين المتواليين هو مضروب أقل الكعبين في العدد الذي يتلوه ويزيد عليه بواحد ، ثم في ثلاثة ثم تزيد عليه واحدا ، وكل مكعب

(٦) كعب : ساقطة في (ب) .

(١٥، ١٤) فإن كان الثالث فالعدد : ساقطة في (د) .

(٢١) ثم في أربعة : ساقطة في (سا) وبعدها فتكون أربعة : أربعة ساقطة في (سا) .

ننقط منه كعبه فيكون الباقي سلس صحيح ، وكل مكعب إلا واحد فبعده كعبه  
إلا واحد وكل واحد وكل مكعب فإن نصفه وضعفه غير مكعب ، وكل مكعب  
جمع إليه الواحد ومضروب المثلث الذى فى مرتبته فى ستة أبدا ، فهو الكعب الذى  
يليه ، فيمكن أن ينشأ من هذه المكعبات .

ومع خواص المكعبات أن امتحانها الذى على عمل الحساب الهندى يكون إما واحدا؟  
ولما ثمانية وأما التسعة ، فإن كان واحدا فأحاد المضلع واحد أو أربعة أو سبعة ،  
وإن كان ثمانية فثمانية أو اثنان أو خمسة ، وإن كان تسعة فثلاثة أو ستة أو سبعة  
وقد تقسم المضلعات من العدد ، فيقال إن منها ماهو هُروى الطول، ومنها ماهو غيرى  
الطول ، ومنها ما هو متباين الطول وهو الذى الخلاف بين طوله وعرضه بما هو فوق  
واحد . ومن عادة المتكلمين فى صناعة العدد أن يوردوا فى هذا الموضع وفيما يجرى  
مجره كلاما خارجا عن الصناعة ومع ذلك خارجا عن عادة البرهانيين، وأشبه شىء  
بقول الخطباء والشعراء ، فليهجر ذلك ، ولغظ عليه مستهله فى تسميتهم الطول  
بالغيرى الطول فيشبه أن يكون أول غيرية يقع بين العدد والعدد هو بواحد ، فيكون  
هو أصل المخالفة ومبتدأه كما أنه أصل العدد نفسه ، فيكون الأعداد الغيرية الطول  
هى المتفاوتة بواحد ، والسطوح الغيرية هى التى تحيط بها ضلعان غيريان ،  
وإذا رسم جدول فرتب فيه الأفراد على تواليها مبتدئة من الواحد فى سطر  
والأزواج على تواليها مبتدئة من الاثنين فى سطر يولد من جمع الأفراد  
على ما علمته الأعداد المربعة ، وتولد من جمع الأزواج الأعداد الغيرية الطول  
فيتولد من الفردية الهوهوية ومن الزوجية الغيرية على حسب الواحد ، ويتبدىء

١٩	١٧	١٥	١٣	١١	٩	٧	٥	٣	١
٢٠	١٨	١٦	١٤	١٢	١٠	٨	٦	٤	٢

الفثاغوريون من هذا الموضع فى بيان لا محصول له . فإن رتبت المربعات كرة ثانية  
فى سطر والغيريات الطول فى سطر ، ظهر من مجاورة السطرين أمور وخواص ،  
فسن ذلك أنك بجدول الغيريات على نسبة الضعف من أول المربعات وهو الزائد  
مثلا ، والثانى عند الثانى على نسبة الزائد نصفا ، والثالث عند الثالث على نسبة

(٧) وإن كان تسعة : تسعة أو أربعة ما .

الزائد ثلثاً ، وكذلك كل على نسق الأعداد والمراتب فعلى أنه للرابع ربع وللخامس خمس ، وتجد التفاضل على نسبة الأعداد الطبيعية ففضل المرتبة الأولى واحد وفضل المرتبة الثانية اثنان، وكذلك . فإن حذف الواحد وقوبل بين ما هو عدد جاءت النسبة

٣٦	٢٥	١٦	٩	٤	١
٤٤	٣٠	٢٠	١٢	٦	٢

- كذلك ، ولكن الزيادة من جانب كان منه النقصان ، فمكان الأربعة للاثنين على نسبة الضعف ، والتسعة للسته على نسبة الزائد نصفاً ، والسته عشر للاثنى عشر على نسبة الزائد ثلثاً ، وكذلك كان التفاوت على نسبة الأعداد الطبيعية مبتدئة من الاثنين . ثم إن رتب أول الغيريات بعد المربع الأول مبتدئا من الواحد وثانيها بعد المربع الثاني أدت هذه النسبة بعينها مؤلفة فكان نسبة الاثنين إلى الواحد كنسبة الأربعة إلى الاثنين وهى نسبة الضعف مثناة ؛ وكانت نسبة الستة إلى الأربعة كنسبة التسعة إلى الستة وهى نسبة الزائد نصفاً ، وقد بينت دائماً ، ويكون الطرفان من كل نسبة إذا جمع مع ضعف الوسط مربعا ، ثم إن جمعت أعداد السطرين على نظامها . وابتدأت الأفراد من الواحد تولد منها الأعداد المثلثة على نظامها ، وتجد كل مضلع إذا نقص منه ضلعه تولد الغيرى الذى يجاوره من جانب النقصان ، وإذا زيدت عليه ضلعه تولد الغيرى الذى يجاوره من جانب الزيادة ، وإذا تحرك ضلع الكعب عنه نقي أضلاعه عنها ، وإذا أحدث مسطحا بين مربعين وحدث المربع الأول ، تأخذ منه نسبة ، والمربع الثانى نسبة أخرى ولكن يرجعان إلى النسب المتوالية مبتدئة من الضعف ، ثم المثل والنصف ، ثم المثل والثلث ، وكذلك قالوا ، فالفرد من تعطى عليه الهوهوية ولذلك تتولد منها المربعات والمكعبات ويوجد فى مراتب الأفراد مربع ، ولا يوجد فى مراتب الأزواج البتة .

تمت المقالة الثالثة من الأثر ثماطيقى بحمد الله وعونه .

( ٢ ) الأعداد والمراتب فعل : مثل (ب) ونجد : فكل (ب) .

الجدولان غير موجودين فى (د) ولكن فى ب يزيد ٢١ ٢٣ ٢٥ ٢٧

٢٢ ٢٤ ٢٦ ٢٨

(١٢) وقد علمت : وقد بنيت (سا) .



# المقالة الرابعة المتواليات العشر





## (المتواليات العشر)

- وقد جرت العادة أن نذكر في هذا الموضع المناسبات وأصنافها وخواصها، ومن الناس من يخترع للمناسبات شروحا كثيرة يبلغ بها عشرين وجها، ومنهم من اقتصر على عشرة، وهو المنقول من القديم ومن غرضي أن اقتصر على تلك العشرة وعلى الاقتصار فيها، فليس تميل نفسي إلى إيراد جميع ما أوردوه وذكر جميع ما قالوه، فذلك مما لا محصل له، وأنت فيجب أن تعلم أن هذه المناسبات المعتبرة أكثر محصولها فيما بينها تفاوت، والأمور المتفاوتة التي يجري تفاوتها على نمط واحد، إما متصل مثل نسبة أ إلى ب، ومثل ب إلى ح، أما أن يكون متشابهة دائما ونمطها في كمية نفسها أو كميته عند غيرها، وهذا هو الأصل والمعتبر، وتشابه تفاوت الأعداد في كمية نفسها هي مثل أن يكون زيادة هذا على ذلك مساويا لزيادة الثالث على الرابع، مثل زيادة الستة على الأربعة والعشرة على الثمانية أو الأربعة على الاثنين، وهذه هي المناسبة العددية. ويشابه تفاوت الأعداد في كميته عند غيرها كمثل أن تكون كمية زيادة هذا التفاوت عندما يعاونه واحد، وهذا مثل حال الأربعة عند الاثنين في المعاونة هو مثل حال العشرة عند الخمسة وهذه هي المناسبة الهندسية، فهذان بالحقيقة أصلا، لكن لما اعتبر حال تفاوت الكمية المضافة في تفاوت الكمية العددية في المناسبة العددية وحال تفاوت الكمية المضافة وجدا مختلفين، فلا يوجد هناك اتفاق ألينة، مثلاً لنضع نسبة هندسية مثل أربعة وستة وتسعة فإن الكمية المضافة متشابهة والكمية التي للعدد نفسه متشابهة فإن التفاوت في بعد أحدهما اثنان وفي الآخر ثلاثة، ولتوضع نسبة عددية مثل أربعة وستة وثمانية فيوجد تفاوت الكمية في نفسها متساويا وتفاوت الكمية بالقياس غير متشابه بل يكون ستة لأربعة زائدا بالنصف والثمانية للستة ليست زائدة بالنصف بل زائدة بالثلث، وتوجد النسبتان دائماً متواليتين لكن

(٣) شروحا : (سا) - وجوها (ب) .

(٤:٣) اقتصر على عشرة وهو المنقول من القديم ومن غرضي أن اقتصر على : ساقطة (ب) .

(٥) فذلك مما لا محصل له : ساقطة (ب) ب .

١ كبرهما بين العددين الأقلين وأصغرهما بين العددين الأكبرين ، فتنبه من هذه الأجزاء وهو أن نطلب أعدادا تأليفها يجعل النسبتين اللتين بينهما متواليتين ويجعل الكبرى والصغرى بين الأصغرين ، فوجدت مناسبة أخرى على هذه الصفة ، مثل مناسبة ما بين الستة والأربعة والثلاثة ، وسميت تأليفية لأن الانتفاع بمراعاة واسطة هذه المناسبة إنما يقع في صناعة التأليف وهو الموسيقى على ما سنعلمه في موضعه ، وقد يجوز أن تكون قد سميت تأليفية لأن نسبة الطرفين مؤلفة من نسبة الفصيلين على ما نعلم ، ولزمتها خاصة أن نسبة فضل الأعظم على الأوسط إلى فضل الأوسط على الأصغر هي نسبة الطرف الأعظم إلى الأصغر ، مثل نسبة الاثنين وهو فضل الستة على الأربعة إلى الواحد الذي هو فضل الاثنين على الثلاثة ، ثم إنهم فطنوا من هذه الخاصية التي لزمت هذه النسبة لاعتبار مناسبات فضول الحدود المناسبة ، فدرجوا منها إلى مناسبات ووسائط أخرى إنما تقع من جهة تميم القسمة أو تكثيرها فلا جدوى لها أو لا كبير جدوى لها في العلوم .

فلنبتلئ بمناسبة مناسبة وواسطة واسطة ، ونقول فيها كلاما موجزا ، أما الواسطة الهندسية فإنها تكون المجلور مضروب الطرفين ليكون جنرا ما يجتمع من الطرفين أحدهما في الآخر فأمر قد عرفته في موضع آخر وعرفت أنه إذا كان بدل الواسطة واسطتان فمضروب أحدهما في الآخر كمضروب الطرفين أحدهما في الآخر ، فهذا يدل على طلب الواسطة ، وعرفت في هذا البحث أن هذه المناسبات الهندسية تتصل ثلاثة ثلاثة في أدراج الغيريات المتتالية وفي المربعات المتتالية ، وقد علمت أيضا في مواضع أخرى أن كل مربعين يمكن أن يقع بينهما واسطة هندسية واحدة فقط ، وكل مكعبين يمكن أن يقع بينهما واسطتان هندسيتان ، فلا نحتاج إلى أن نستأنف لك تعليم هذه الأحوال . وأما المناسبة والواسطة العددية فلإنشاؤها من ترتيب الأعداد على تزايد واحد سواء كان بواحد أو بعشرة وهنالك تجدها متصلة بواسطة ومنفصلة بواسطتين وتعرف حال الواسطة عند الحاشية وسائر ذلك بما تقدم لك وعلمت الحال في تتالي النسبة وموقع الصغرى والكبرى ، والذي نستفيد هاهنا طلب واسطتها ، وهو أن يوجد نصف مجموع الطرفين على ما علمت ، وخاصيتها هو أن الذي يكون من ضرب أحد الطرفين في الآخر أقل من مربع الأوسط بمربع الفصل مثل أن مضروب الاثنين

(١) من هذه الأجزاء : من هذا الأمر لأمر آخر (سا) ، (ب) .

(٩) هو فضل الإثنين على الثلاثة : هو فضل الثلاثة على الإثنين (سا) ، (ب) .

(١٥) فأمر قد عرفته في موضع آخر وعرفت : وقد عرفت في موضع آخر (ب) .

في الستة أقل من مضروب الواسطة في نفسها وهو الأربعة بمضروب الفضل وهو  
 الاثنان في نفسه . وأما المناسبة والواسطة التأليفية وعرفت مضاداتها للعديدية فيما يضاده فيه ،  
 واستخراج واسطته بأن يضرب الاختلاف بين الأعظم والأصغر في الأصغر ونقسم  
 على مجموعهما ونزيده على الأصغر فتخرج الواسطة مثل الاختلاف بين الستة والثلاثة ،  
 وهو الثلاثة تضرب في الثلاثة فيكون تسعة فيقسم على مجموع الستة والثلاثة فنخرج  
 واحد فنزيده على الثلاثة فيكون أربعة ٦ ، ٤ ، ٣ ، وإذا كان عندك الأوسط والكبير  
 فأردت أن تجد الأصغر نظرت إلى فضل ما بينهما كم هو من الأوسط بأن تقسم عليه  
 الأوسط مرة أخرى ، فما خرج تنقصه من أوسط فما بقي فهو الأصغر ، وإن كان  
 الأصغر والأوسط معلومين عندك فأردت الأكبر ، قسمت الأوسط على الفضل  
 فما خرج نقصت منه واحدا ثم قسمت عليه فما خرج زدته على الأوسط . ومن  
 خواص هذه المناسبة أن مضروب مجموع الطرفين في الأوسط . مثل ضعف إحدى  
 الحاشيتين في الأخرى ، وأيضا فإن مضروب واسطته في الأكبر مثل ضعف  
 واسطته في الأصغر وضعف مضروب أحد الطرفين في الآخر .

وقد ظن قوم أن هذه النسبة إنما سميت تأليفية ، لأن فضولها ليست في الحدود  
 وحدها ولا في التفاضل وحده بل بعض في ذا وبعض في ذلك ، فكأنه وقع في ذلك تأليف  
 وهذا متكلف ، وقد قالوا ما هو أشد تكلفا من هذا . فأما المناسبات التي بعد هذه  
 فمنها ثلاثة عرفت أولا ، ومنها أربعة عرفت ثانيا ، ومنهما مناسبات ليس من عزمنا  
 أن نلتفت إليها . وهذه الأربع تعرف بالثلاثة والخامسة والسادسة ، وتسمى الرابعة المضادة  
 لأنها تضاد التأليفية ، فإنها جعلت بحيث يكون نسبة فضل الأوسط على الأصغر إلى  
 فضل الأعظم على الأوسط ، كنسبة الأعظم إلى الأصغر مثل ٣ ، ٥ ، ستة ، واستخراجها  
 بضرب الفضل بين الطرفين في الأصغر والقسمة على مجموعهما واسقاط ماخرج من  
 الأعظم فهو الأوسط . وخاصيتها أن مضروب الأعظم في الأوسط ضعف مضروب  
 الأصغر في الأوسط ، والمناسبة والواسطة الخامسة أن يكون الأوسط عند الأصغر مثل  
 فضل تفاضل الأصغرين عند تفاضل الأعظمين وأعداده ٢ ، ٤ ، ٥ ، وكأنها تضاد بذلك

( ١ ) وهو الأربعة : ساقطة في ( د ) .

( ١٢ ) مضروب واسطته في الأكبر مثل ضعف واسطته في الأصغر وضعف مضروب أحد الطرفين  
 في الآخر في الجزء الأول في المثال فقط ، والجزء الثاني خاص بسطرين قبل ذلك ( المحقق ) .

( ١٣ ) الأصغر : الأكبر ( سا ) .

( ٢٢ ) الأعظم  $\times$  الأوسط = ضعف مضروب الأصغر في الأوسط : هذا في المثال فقط ( المحقق ) .

الهندسية ، وطلب هذه الواسطة أن تزيد الأصغر على الأكبر ، وتقسم ما اجتمع قسمة يكون ضرب أحدهما في الآخر كضرب الباقي من الأعظم بعد طرح الأصغر منه في الأصغر ، وذلك سهل لمن عرف النسبة فإن أمكن ذلك ، وإلا فالمسألة مستحيلة ، فما خرج ينقص الأصغر من أكبره وما بقي فهو الواسطة . ومن خاصيتها أن ضرب الأعظم في الأوسط ضعف ضرب الأعظم في الأصغر مزيدا عليه الأوسط ، ومن تلك أن واسطتها في المناسبة الضعفية مجذور دائما جذره الأصغر ، وأن الطرف الأعظم أصغر من مجموع الباقيين بواحد ، والسادسة أن يكون الأعظم عند الأوسط مثل فضل الأصغر عند فضل الأعظمين ، وهي أيضا تضاد بذلك الهندسية ، ومثاله ٦٤١ ، واستخراج الواسطة بأن تنقص الأصغر من الأعظم ويزاد عليه فينظر مبلغ الباقي فيضرب في الأعظم ، ثم ينظر كم يحتاج أن يزداد على الأعظم حتى يكون ضرب تلك الزيادة في جميع المجموع من الأصل والزيادة بين مثل المسطح الذي حفظ للمجموع الزيادتين هو الواسطة ، فان أمكن فالمسألة محال ، وأيضا فانك إذا نقصت وضربت أخذت مربع نصف مجموع الحاشيتين وزدته على المحفوظ وأخذت جذره ونقصت منه المضروب أولا في نفسه فما بقي تزيده على الأصغر . وقد وجد بها من الخواص أن المناسبة إذا كانت على نسبة المثل والجزء كان الواسطة مجدورا ، أو إذا أضيف إليها جذرها كان مجموعها الطرف الأعظم والطرف الأصغر أقل منه بجذره ، وأما الأربعة التي عرفت أخيرا فأولهما وهي السابعة أن تكون نسبة التفاضل بين الطرفين إلى التفاضل بين الأصغرين كنسبة الأعظم عند الأصغر ، مثاله ٩٨٦ ، واستخراج واسطتها بضرب الأصغر في الفضل بينه وبين الأعظم وقسمة المجموع على الأعظم وزيادة ما خرج على الأصغر ، فما بلغ فهو الواسطة ، والثامنة أن تكون نسبة الأعظم إلى الأصغر كنسبة تفاضل الطرفين إلى تفاضل الأعظمين ، مثاله ستة سبعة تسعة وهي عكس السابعة ، واستخراج واسطتها عكس استخراج تلك الواسطة ، وذلك بضربك الأصغر في الفضل بين الطرفين وبقسمة الخارج على الأعظم فما خرج تنقصه من الأعظم ، فما بقي فهو الواسطة ، والتاسعة أن يكون نسبة تفاضل الطرفين إلى تفاضل الأصغرين نسبة الواسطة إلى الأصغر مثل ٧٦٤ ، واستخراج واسطتها بأن ينقص الأصغر من الأكبر ويقسم الباقي قسمة تكون نسبة أحد القسمين إلى الآخر كنسبة الآخر إلى الأصغر ان أمكن ، فتسقط القسم الأول منهما من الأعظم ، فما بقي

(٦) الضعيفة : الضعيفة .

(٩) تنقص : تخرج (سا) - ٦٤١ : ٦٥٤١ (ب) :

(١٨) ٩٨٦ : ٧٦٤ أو ٩٨٣ (سا)

فهو الأوسط ، ولك أن تجمع مضروب الفضل في الأصغر إلى مربع نصف الأصغر وتأخذ جذره فزيد على نصف الأصغر ، وهذه المناسبة على نسبة المثل والجزء كان الأصغر مربعا ابدا . والمناسبة والواسطة العاشرة أن تكون نسبة تفاضل الطرفين إلى تفاضل الأعظمين مثل نسبة الواسطة عند الأصغر ومثاله ٢ ٣ ٥ ، واستخراج واسطته أن تأخذ فضل ما بين الطرفين مضروبا في الصغرى منقوصا من مربع نصف الكبرى فتأخذ جذر ذلك وزدته على نصف الصغرى فهذه هي الوسايط العشرة . والعديد منها لا يجتمع في طرفين مع الهندسية أبدا ، ولا مع السابعة والثامنة ، ولا مع التأليفية إلا أن يكون الأعظم ضعف الأصغر مثل الستة والثلاثة فتوجد بينهما الواسطتان معا ، ولا مع الرابعة إلا أن يكون الأعظم أيضا ضعف الأصغر ، والهندسية لا توجد مع التأليفية ولا مع الرابعة ولا مع السابعة ولا مع الثامنة ولا مع التاسعة ، إذا فرض لنا الثمانون والعشرون حدين كان ١٠ الخمسون بينهما واسطة عددية ، والأربعون واسطة هندسية ، واثنان وثلاثون واسطة تأليفية ، والثمانية والستون واسطة رابعة ، والخمسة والثلاثون واسطة سابعة ، والخمسة والستون واسطة ثامنة ، وقد خرجت الخامسة والسادسة والتاسعة والعاشرة ، فلنضع أول حدود المناسبة الخامسة وهي ٢ ٤ ٥ ، فاذا نقص من الأصغر واحد وزيد على الأعظم صار ١ ٤ ٦ وهي المناسبة السادسة ، وإذا زيد على كل حد اثنان حتى صار ٤ ٦ ٧ خرجت ١٠ المناسبة التاسعة ، وإذا نقص من المناسبة الخامسة واحد حتى صار ٢ ٣ ٥ خرجت المناسبة العاشرة .

فهذا ما نقوله في علم الارثماطيقى ، وقد تركنا أحوالا اعتبرنا ذكرها في هذا الموضع خارجة عن قانون الصناعة ، وقد بقي من علم الحساب ما يغني في الاستعمال والاستخراج ، وهو هو في العمل مثل الجبر والمقابلة والجمع والتفريق الهندي وما يجري مجراها ، والأولى في أمثال ذلك أن تذكر في الفروع فلنقتصرها هنا على المبلغ المذكور ولنعهده إلى علم الموسيقى .

تمت المقالة الرابعة من الأرثماطيقى وتم الكتاب بحمد الله وحسن توفيقه .

(٥) نصف الصغرى : صوابه نصف الكبرى (المحقق) .

(١١) واثنان وثلاثون . ثلاثون ساقطة في (سا) ، (د) .

(١٦) المناسبة الخامسة : الخامسة ساقطة في (سا) ، (د) .